Высшая математика – просто и доступно!

Вспомнить всё. Что нужно

Кратчайший курс школьной математики

Настоящий курс ***предназначен для тех, кто начал изучать высшую математику, но позабыл школьную****. Вашему вниманию представлена уникальная выборка из всей школьной программы – именно то, что потребуется в высшей математике!*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Числа, буквы ~~ноты~~ и действия с ними

Здравствуйте, дети! Садитесь. Меня зовут Емелин Александр, я ваш новый учитель по высшей математике. На первом уроке мы повторим материал за все 11 классов:

1.1. Числа

Во-первых, не следует путать ***числа*** с ***цифрами***.

Цифры – это *числовые символы*, с помощью которых записывают числа. Наиболее известны ***арабские цифры***: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ и ***римские цифры***: $\mathrm{I},\ \mathrm{V},\ \mathrm{X},\ \mathrm{L},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{M}$.

Ну а **числа** – это числа :)

Исторически первыми появились ***натуральные числа***, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.):

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots\}$, для краткости *множество натуральных чисел* обозначают утолщённой, стилизованной или жирной буквой $\mathbf{N}$.

И полезно будет вспомнить римский вариант:

$$\mathbf{N}=\{\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII},\ \mathrm{IX},\ \mathrm{X},\ \mathrm{XI},\ \mathrm{XII},\ \ldots\}$$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль: $0\in\mathbf{N}$.

Справка: *элементы произвольного* ***множества*** *принято записывать в фигурных скобках* $\{\ \}$. *Если множество не содержит элементов, то его называют* ***пустым*** *и обозначают символом* $\varnothing$. *Значок* $\in$ *символизирует принадлежность множеству.*

Если к множеству $\mathbf{N}$ присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество* ***целых чисел***:

$\mathbf{Z}=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, оптимизаторы и лентяи записывают его элементы со значками *«плюс минус»*: $\mathbf{Z}=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\}$

Совершенно понятно, что натуральные числа являются ***подмножеством*** множества целых чисел: $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$ (*значок* $\subset$ *называют значком включения*). Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

И, коль скоро, целые, то сразу же вспомним важные признаки их делимости на 2, 3, 5 и 10, которые будут требоваться в практических вычислениях чуть ли не каждый день:

1) Целое число делится на 2 без остатка, если оно заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8. Например, числа 400, -1502, -24, 66996, 818 – делятся на 2 без остатка.

Если целое число делится на 2 без остатка, то его называют ***чётным***, в противном случае оно ***нечётное***. Ноль – это чётное число (т.к. делится на два без остатка).

2) С делимость на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, если сумма входящих в него цифр делится на 3. Примеры:

Проверим, делится ли на 3 число 27901. Для этого просуммируем его цифры:
2 + 7 + 9 + 0 + 1 = 19 – не делится на 3
Вывод: 27901 не делится на 3.

Просуммируем цифры числа -825432:
8 + 2 + 5 + 4 + 3 + 2 = 24 – делится на 3
Вывод: число -825432 делится на 3

3) Целое число делится на 5, если оно заканчивается пятёркой либо нулём:

775, -2390 – делятся на 5

4) Целое число делится на 10, если оно заканчивается на ноль:

798400 – делится на 10 *(и, очевидно, на 100)*. Ну и, наверное, все помнят – для того, чтобы разделить на 10, нужно просто убрать один ноль: 79840

Также существуют признаки делимости на 4, 6, 8, 9, 11 и т.д., но практического толка от них практически нет =)

Следующим числовым множеством идёт *множество* ***рациональных чисел***:

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – то есть, любое рациональное число представимо в виде ***обыкновенной дроби*** $\frac{m}{n}$ с целым ***числителем*** (верх) и натуральным ***знаменателем*** (низ).

Немедленно повторим понятие *положительной обыкновенной дроби*. Представьте торт, который можно разрезать на любое количество **равных** кусков. …Почему торт? Потому что в нём мало букв ☺. Итак, торт – это единица. Интерпретируем дроби:

$\frac{2}{3}$ – торт разрезали на 3 равных куска, взяли 2 куска *(две третьих)*;

$\frac{1}{5}$ – торт разрезали на 5 равных кусков, взяли 1 кусок *(одну пятую)*;

$\frac{6}{7}$ – торт разрезали на 7 равных кусков, взяли 6 кусков *(шесть седьмых)*.

Обратите внимание, что числитель любой из этих дробей **меньше** знаменателя. Такие дроби называют ***правильными***. Правильная дробь обязательно меньше единицы. Если же мы берём **все** куски торта или больше, то дробь будет ***неправильной***:

$\frac{10}{10} = 1$ – торт разрезали на 10 равных куска, взяли 10 кусков (один торт);

$\frac{7}{4}$ – торт разрезали на 4 равных куска, взяли 4 куска и от второго торта взяли ещё 3 таких же куска. Итого, семь четвёртых или: $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ – одна целая три четверти.

Дроби с целой и дробной частью (например, $1\frac{3}{4}$) называют ***смешанными***.

Характерным «опознавательным» признаком *рациональногo числа* является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается:

либо $\frac{-3}{1} = -3$ – целое число, либо $\frac{3}{8} = 0{,}375$ – *конечная* ***десятичная дробь***, либо $\frac{7}{11} = 0{,}63636363...$ – бесконечная *периодическая* десятичная дробь *(повтор может начаться не сразу)*.

Полюбуйтесь этим делением и постарайтесь так делать как можно реже! Это не мантра, и даже не золотое правило – это самая настоящая **практическая аксиома**, которую я не устану повторять в будущем:

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Согласитесь, что иметь дело с дробью $\frac{3}{8}$ значительно удобнее, чем с десятичным числом 0,375 *(не говоря уже о бесконечных дробях)*. О том, как перевести десятичную дробь в обыкновенную, поговорим чуть позже.

Помимо рациональных существует множество **I** ***иррациональных чисел***, каждое из которых представИмо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в бесконечных «хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:

$\pi = 3{,}1415926535...$
$e = 2{,}7182818284...$ («год рождения Льва Толстого» дважды)
$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ и так далее.

О знаменитых константах «пи» и «е» информации предостаточно, поэтому на них я не останавливаюсь. Из всей этой информации желательно помнить хотя бы 2-3 знака после запятой: $\pi \approx 3{,}14$, $e \approx 2{,}718$ *(значок $\approx$ означает «приблизительно равно»)*.

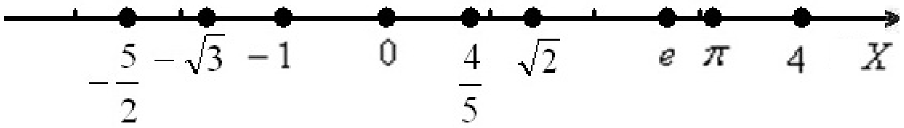
Повторим заодно **правило округления десятичных дробей**: при округлении дроби до некоторого знака после запятой, нужно посмотреть на следующий разряд: если там 0, 1, 2 или 4, то число округляется в меньшую сторону, если же там 5, 6, 7, 8 или 9, то число округляется в бОльшую сторону. Так, при округлении числа $\pi = 3{,}141592...$ до двух знаков после запятой смотрим на разряд *тысячных*: там 1, поэтому округляем в меньшую сторону: $\pi \approx 3{,}14$. Теперь округлим «пи» до трёх знаков после запятой – смотрим на следующий разряд: 5, поэтому округляем в бОльшую сторону: $\pi \approx 3{,}142$. При округлении до четырёх знаков после запятой опять округляем в бОльшую сторону: $\pi \approx 3{,}1416$ (поскольку в следящем разряде 9). Едем дальше:

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество* ***действительных (вещественных) чисел***:

$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

Справка: *$\cup$ – значок объединения множеств.*

Геометрическая интерпретация множества $\mathbf{R}$ вам хорошо знакома – это ***числовая прямая*** или ***числовая ось***:



Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Числовую ось обозначают буквами OX, где буква O символически совмещается с нулём. Точка O называется ***началом координат***. Числовую прямую также обозначают *бесконечным* ***интервалом*** $(-\infty; +\infty)$ *(∞ – значок бесконечности)*.

Запись $x \in (-\infty; +\infty)$ или эквивалентная ей запись $x \in \mathbf{R}$ символизирует тот факт, что x принадлежит множеству действительных чисел (или попросту, «икс» – действительное число). …Ну вот мы и добрались до «иксов» ☺

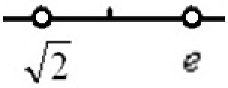
В различных задачах часто рассматривают следующие ***числовые промежутки***:

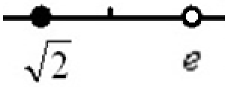
конечные *интервалы*, например, $(\sqrt{2}; e)$, ***полуинтервалы***, а-ка $\left[\sqrt{2}; e\right)$ и $\left(\sqrt{2}; e\right]$, и ***отрезки***, $\left[\sqrt{2}; e\right]$.

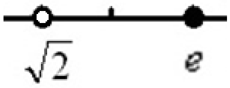
Справка: *круглая скобка означает то, что крайнее значение не входит в промежуток, а квадратная то – что входит.*

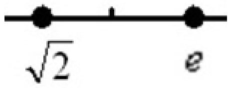
Значения, которые не входят в промежуток обозначают выколотыми точками:

интервал $(\sqrt{2}; e)$, полуинтервал $\left[\sqrt{2}; e\right)$, полуинтервал $\left(\sqrt{2}; e\right]$, отрезок $\left[\sqrt{2}; e\right]$.









И в заключение параграфа ещё одно важное понятие. Его недопонимают, его недолюбливают, но мы преодолеем эти комплексы ☺:

Модуль или ***абсолютное значение*** числа – это его расстояние от начала координат. Так как расстояние не может быть отрицательным, то модуль любого числа *больше либо равен нулю*. Грубо говоря, модуль «уничтожает» возможный знак «минус»:

… и т.д.

Числа, равные *по модулю* (например, 4 и –4), называют ***противоположными***. Такие числа равноудалены от начала координат *(от нуля)*.

Расстояние между двумя числами равно *модулю их разности*, например: $|5-3| = |2| = 2$, причём, вычитать можно в любом порядке: $|3-5| = |-2| = 2$.

Пожалуй, пока достаточно…, и к модулю мы ещё обязательно вернёмся!

1.2. Буквы

Буквы, как вы знаете, используются в словах ☺. А в математике у них особая роль. Недавно вот мы обозначили ими числовые множества: **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**. Константы ещё были: π и e. Но чаще всего буквами обозначают ***переменные величины*** – чтобы мы могли записывать формулы, функции, да и просто математические факты в *общем виде*.

Определим с помощью букв числовые промежутки:

Интервал – это промежуток $(a; b)$, где a и b – произвольные *действительные числа*, удовлетворяющие условию $a < b$. Для полуинтервалов $[a; b), (a; b]$ должно выполняться то же условие. А для отрезка $[a; b]$ допустимо *нестрогое неравенство* $a \le b$. Если $a = b$, то отрезок *вырождается* в точку и имеет нулевую длину.

Чётко, просто и лаконично.

С помощью букв записывают формулы. И мы начинаем повторять нашу аксиому, а именно вспомним, как перевести *смешанную* дробь в *неправильную*. Это осуществляется по формуле $A\frac{a}{b} = ...$ либо $-A\frac{a}{b} = ...$ (если дробь отрицательна).

Например: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$. Также здесь будет полезно провести неформальное рассуждение: *у нас есть два торта, каждый разрезали на три куска плюс взяли ещё одну треть от третьего торта, итого:* $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ *– семь третьих*.

Всегда стараемся понять СМЫСЛ формул и учимся выводить их самостоятельно!

Ну и, конечно же, ***функции***. Пока в ознакомительном порядке. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Здесь «икс» может принимать все *действительные* значения от $-\infty$ до $+\infty$ (от минус до плюс бесконечности), а функция возводит эти значения в квадрат. Например, если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$, если $x = 5$, то $y = 5^2 = 25$ и так далее.

1.3. Арифметические действия

Несмотря на элементарность темы…, вы бы знали, как тут «плавают»!

Вычитание – это частный случай сложения, разность всегда можно представить в виде суммы положительного и отрицательного числа: $a - b = a + (-b)$.

На удивление этот факт помнят далеко не все. Чего не скажешь о следующем:)

От перестановки слагаемых сумма не меняется: $a + b = b + a$.

Это правило справедливо для любого количества слагаемых, так в трёхчлене $x^2 + 2x - 3$ слагаемые можно расположить в любом порядке, например, так: $x^2 - 3 + 2x$ или даже так: $-3 + 2x + x^2$. Однако **располагать их принято в порядке убывания степеней** *(1-й вариант)*.

У некоторых возникает недопонимание при сложении отрицательных чисел, в этом случае их удобно ассоциировать с температурой:

$-15+20=5$ *(к 15 градусам мороза прибавили 20 градусов тепла)*

$-15-7=-22$ *(к 15 градусам мороза прибавили ;) 7 градусов мороза)*

Ну и конечно помним, что два минуса подряд дают плюс:

$2-(-5)=2+5=7$, $-(-2)-5=2-5=-3$

Деление – это частный случай умножения, любое *частное* $a:b$, любую *правильную* или *неправильную* дробь можно представить в виде произведения:

$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, где $b\neq 0$ *(ибо* ***на ноль делить нельзя!****)*

Так, *семь третьих* тортов – это 7 кусочков по одной трети: $\frac{7}{3}=7\cdot\frac{1}{3}$. Кстати, все ли помнят смысл умножения?

$3\cdot 2$ *(«трижды два»)* означает, что мы 3 раза взяли по 2 попугая (рисовать уж не буду). Итого: 2 + 2 + 2 = 6 птиц…, и закапало с ресниц. Поэтому $3\cdot 2=6$

$2\cdot 4$ *(«дважды четыре»)* означает, что мы 2 раза взяли по 4 попугая.
Итого: 4 + 4 = 8. Поэтому $2\cdot 4=8$

Ну и вместо «дважды по сто» я предлагаю вам заполнить **интерактивную таблицу умножения** *(см. Приложение* ***Таблицы****).*

Далее. При умножении любого числа на ноль получается ноль: $a\cdot 0=0$. Наоборот, естественно, тоже ноль: $0\cdot a=0$. Умножать можно и отрицательные числа, при этом:

один минус даёт минус: $2\cdot(-5)=-10$ либо $-2\cdot 5=-10$,
два минуса дают плюс: $-2\cdot(-5)=10$,
три минуса дают минус: $-(-2)\cdot(-5)=-10$, и так далее.

От перестановки множителей произведение не меняется $a\cdot b=b\cdot a$.

Данное правило справедливо и для бОльшего количество множителей, при этом множители чаще всего располагают так: **сначала** множитель-константа, **затем** переменные в алфавитном порядке, например: $5xy^3(z-1)^2$.

Степень **– это свёрнутая запись произведения:** $x^k=\ldots$, x называют ***основанием*** *степени*, а k – ***показателем*** *степени* или тоже ***степенью***. Например:

…, …, …

Так как два минуса дают плюс, то отрицательное число в **чётной** степени – положительно: $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16,\quad (-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$, а отрицательное число в **нечётной** степени – отрицательно:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8},\qquad (-1)^5 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

НЕ ПУТАЙТЕ $(-1)^4, (-1)^5$ **с записями … !!!** В последнем случае знак «минус» к *основанию* степени **не относится**: …

Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице: $x^0 = 1$. **Помним этот факт в любом состоянии!** Ноль в нулевой степени 0^0 не определён. Хотя, на этот счёт существуют альтернативные гипотезы. Да, ещё один очевидный факт: $x^1 = x$

Теперь обратное действие – извлечение корней, чаще всего ***арифметического квадратного корня*** $\sqrt{a}$, который определён только для $a \geq 0$. Например:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3,\qquad \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 25,\qquad \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Реже встречаются корни более высоких степеней:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2,\quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3,$$

Если корень **нечётный**: 3, 5, 7… то его можно извлекать и из отрицательных чисел! Например: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2,\qquad \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

Хорошим тоном считается частичное извлечение корня *(если это возможно)*:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2},\qquad \sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2},\qquad \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Как быть, если под корнем большое число, например $\sqrt{5904}$? На калькуляторе проверяем, делится ли оно на 4: $\frac{5904}{4} = 1476$. Да, разделилось нацело, таким образом: $5904 = 4\cdot 1476$. А может быть, число 1476 ещё раз удастся разделить на 4? $\frac{1476}{4} = 369$. Таким образом: $5904 = 4\cdot 4\cdot 369$. У числа 369 последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: $\frac{369}{9} = 41$.

В результате: $\sqrt{5904} = ...$

Итак, наш рабочий алгоритм таков: если под корнем находится неизвлекаемое нацело число, то пытаемся выполнить частичное извлечение – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 25, 49, 100 и т.д.

Ну и, конечно, любой «плохой» корень можно вычислить приближённо, самые популярные значения: $\sqrt{2} \approx 1{,}41,\quad \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Хорошим тоном также считается **устранение иррациональности в знаменателе**. Попросту говоря, это когда в знаменателе есть корень: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. В таких случаях нужно использовать искусственный приём – **умножить числитель и знаменатель на корень**, ТАКОЙ, **чтобы в знаменателе корень извлёкся нацело**. Распишу очень подробно:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$ (на последнем шаге сократили дробь на 2)

Аналогичный пример: $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Иногда проскакивают корни более высоких степеней:
$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}=...$

1.4. Порядок действий

При вычислении ***математических выражений*** **сначала** выполняется возведение в степень / извлечение корня**, затем** умножение / деление и **в последнюю очередь** сложение / вычитание. Эпичный пример:

$2+2\cdot 2=2+4=6$, и ещё пример: $\frac{4^2}{2}-3\cdot\sqrt{9}=\frac{16}{2}-3\cdot 3=8-9=-1$

Если в *показателе* степени или под корнем выполняются другие действия, то обычно (но не всегда) сначала выполняем их:

$5^{2+2}=5^4=625,\quad \sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3,\quad \sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$, и в этом примере как раз допустимо поменять порядок действий: $\sqrt{4\cdot 9}=2\cdot 3=6$.

Если есть скобки, то в первую очередь выполняется то, что в скобках:

$(2+2)\cdot 2=4\cdot 2=8,\qquad 2\cdot(-5+3-7)=2\cdot(-9)=-18\qquad (5-7)^4=(-2)^4=16$

Если перед скобкой стоит множитель, то их можно **раскрыть**, умножив **каждое** слагаемое на этот множитель:

$3(a-b)=3a-3b,\qquad 2\cdot(-5+3-7)=2\cdot(-5)+2\cdot 3+2\cdot(-7)=-10+6-14=-18$

Если перед скобками стоит знак «+» (множитель +1), то их можно просто убрать:
$+(-5+3-7)=-5+3-7$

Если перед скобками стоит знак «–» (множитель -1), то их можно убрать, сменив **у каждого** слагаемого знак:

$-(-5+3-7)=5-3+7$, и, к слову, здесь **ошибочно** складывать …, помним, что $5-3+7=5+(-3)+7$ – и сложение можно выполнять в любом порядке.

Теперь самое время потренироваться:

Задание 1

а) Найти модули следующих чисел: 4, –1, $-\dfrac{10}{3}$, пояснить, что это значит. Найти расстояние между следующими числами: 3 и –2, –7 и –13.

б) Выполнить возведение в степень: $2^5,\quad 5^2,\quad 10^0,\quad (-a)^3,\quad (-b)^4$. Вычислить значение функции $y=-x^2+2x$ при $x=-1$ *(замучили с этим примером на сайте :))*.

в) Извлечь корни *(полностью или частично)*, если это возможно:

$$\sqrt{12},\quad \sqrt{20},\quad \sqrt{43},\quad \sqrt{49},\quad \sqrt{72},\quad \sqrt{121},\quad \sqrt{1000},\quad \sqrt{1875},\quad \sqrt[3]{-81},\quad \sqrt[4]{-16}$$

г) Избавиться от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{6}{\sqrt{3}},\quad -\dfrac{1}{\sqrt{7}},\quad \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

д) Выполнить действия:

$$3\cdot 2^2+1,\quad 3\cdot(2^2+1),\quad \frac{6\cdot 5}{3},\quad \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{2}-1\right)^3,\quad \sqrt{13-2\cdot 7},\quad -2(x-\sqrt{9}-3(1-2))$$

Решения и ответы для сверки в конце курса. Надеюсь, правильные ☺

1.5. Действия с обыкновенными дробями

Важнейший параграф.

Во-первых, следует заметить, что **дробь и число – это не одно и то же**. Дробь – это *форма записи* числа. **Одно и то же число можно записать разными дробями**, например:

$$1\frac{1}{2},\quad 1{,}5,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{6}{4},\quad \frac{15}{10}$$

Согласно практической аксиоме, **все действия в высшей математике мы стремимся проводить в правильных и неправильных дробях**, и, очевидно, из всех перечисленных вариантов нас устраивает *неправильная* дробь $\dfrac{3}{2}$. Возникает вопрос, как свести все остальные дроби к этому виду?

С первым случаем мы уже сталкивалась – *смешанную* дробь можно перевести в неправильную по формуле $A\dfrac{a}{b}=...$ либо $-A\dfrac{a}{b}=-...$. В нашем примере:

$1\dfrac{1}{2}=\dfrac{1\cdot 2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$. Или рассуждаем устно и неформально: один торт режем пополам и добавляем ещё половину: $1\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

ОК. Как быть с дробями $\dfrac{6}{4},\ \dfrac{15}{10}$? Их нужно ***сократить***.

➢ Сокращение дробей

Сокращение числовой дроби – это деление её числителя и знаменателя на **одно и то же** натуральное число, бОльшее единицы, *без остатков*. Если, конечно, такое деление возможно, ибо у дроби $\frac{3}{2}$ и сокращать-то нечего. Такие дроби называют ***несократимыми***

Легко видеть, что и числитель и знаменатель дроби $\frac{6}{4}$ делится на 2 без остатка, поэтому такую дробь можно и нужно сократить: $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{10}$ делится на 5, и мы делим: $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

Зачастую сокращение проводится несколько раз, так, например, дробь $\frac{36}{84}$, очевидно, можно сразу сократить на два: $\frac{36}{84}=\frac{18}{42}$. И ещё раз на два: $\frac{18}{42}=\frac{9}{21}$. На два больше сократить нельзя, но зато можно на три: $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$. Больше сократить нельзя.

И для очистки совести можно выполнить «любительскую» проверку, а именно, разделить на калькуляторе 36 на 84, а затем 3 на 7, убедившись тем самым в справедливости равенства $\frac{36}{84}=\frac{3}{7}$.

Любую «подозрительную дробь» нужно пробовать сократить: для этого мысленно либо на черновике / калькуляторе проверяем, делится ли её числитель и знаменатель на 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19… – бОльшие делители встречаются редко.

Переменные величины тоже можно сокращать, например:

…

И в последнем примере есть один момент: после сокращения в знаменателе пропала переменная p. Что это значит? Это значит, что исходная дробь **не** определена при $p=0$, но сокращённая уже определена.

Особое внимание на этот момент следует обращать при сокращении *функций* и *уравнений*. Так, функция … не определена при $x=-1$ и если мы сокращаем её на $(x+1)$: … то **обязательно** следует указать, что $x\neq-1$.

Вот ещё один типичный пример: $(x-1)(x^2+2x-3)=0$ – **здесь ни в коем случае нельзя сокращать** *(делить)* на $(x-1)$, поскольку мы потеряем корень $x=1$ этого уравнения.

➢ Как перевести десятичную дробь в обыкновенную?

Сначала её нужно прочитать человеческим языком: 1,5 - *одна целая, пять десятых*. И теперь всё понятно: $1\frac{5}{10}$. Дробную часть сокращаем на пять, и вуаля: $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Другое число: 0,4 – читаем вслух: *ноль целых, четыре десятых*, то есть: $\frac{4}{10}$. Сокращаем дробь на два $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, после чего делим на калькуляторе 2 на 5 и убеждаемся, что получилось 0,4.

И ещё пример: 0,52 – *ноль целых, пятьдесят две сотых*. Так и записываем: $\frac{52}{100}$. Дробь можно сократить на два: $\frac{26}{50}$. И ещё раз на два: $\frac{13}{25}$. Больше ни на что сократить нельзя. Для проверки делим 13 на 25 на калькуляторе и убеждаемся, что получилось 0,52.

Возникает вопрос: а неужели смешанные и десятичные дроби вообще не в ходу? Нет, почему же, варианты $1\frac{1}{2},\ 1{,}5$ хороши, но только если это у вас окончательный ответ задачи, и с этим числом больше ничего не нужно делать. В некоторых случаях, например, в ряде задач теории вероятностей бывает удобнее провести вычисления в десятичных дробях. Кроме того, они уместны в задачах вычислительной математики. И ещё кое-где. **Но всё это исключения из правила. Рулят правильные и неправильные дроби!**

В следующих пунктах по умолчанию речь пойдёт только о таких дробях, и действия с ними я разберу по нарастанию сложности:

➢ Умножение дробей

Число на дробь умножается просто: $A\cdot\frac{a}{b}=\frac{A\cdot a}{b}$, например: $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$. **Оставляем именно в таком виде! Больше ничего с этой дробью делать не нужно!**

Если перед дробью есть знак «минус» (множитель -1), то его можно отнести к числителю либо знаменателю: $-\frac{a}{b}=\dots$. Это бывает удобно или даже необходимо при решении некоторых задач. Так, у дроби $-\frac{1}{1-x}$ минус выгодно снести вниз, чтобы раскрыть скобки и записать дробь более компактно: $-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-(1-x)}=\frac{1}{-1+x}=\frac{1}{x-1}$.

Дробь на дробь тоже умножается просто: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, например:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6},\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35},\quad \frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{2y^2}{3}=\frac{1\cdot x\cdot 2y^2}{3\cdot 3}=\frac{2xy^2}{9}.$$

Перед тем, как перемножать числители / знаменатели, нужно посмотреть, а нельзя ли что-нибудь сразу сократить? Это более рациональный метод вычислений:

$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 8}=...$ – и здесь вместо перемножения $\frac{4\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{12}{40}$ удобно сразу же сократить числитель и знаменатель на четыре: $...=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2}=\frac{3}{10}$

$\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{15}=\frac{5\cdot 2\cdot 7}{6\cdot 9\cdot 15}=\frac{1\cdot 1\cdot 7}{3\cdot 9\cdot 3}=\frac{7}{81}$ – а здесь перед перемножением удалось сократить на 5 и на 2. Множители-единицы на чистовике можно не рисовать, это я для понимания.

Далее. Степень. Тоже очевидное правило, которое следует из определения степени: чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель: …, например: $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$, $\left(\frac{3x}{5}\right)^2=\frac{3^2x^2}{5^2}=\frac{9x^2}{25}$ и тому подобное.

Если дробь отрицательна, а степень *чётная*, то минус «съедается»: $\left(-\frac{a}{b}\right)^k=\frac{a^k}{b^k}$, если же k *нечётная*, то минус «выскакивает» из-под степени: $\left(-\frac{a}{b}\right)^k=-\frac{a^k}{b^k}$.

Простейший пример: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=...$

Обратно, для извлечения корня справедливо очевидное правило $\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$, например: $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$. Если k *нечётное*, то дробь может быть и отрицательной: $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=-\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{2}{3}$. Но, как вариант: $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}=-\frac{2}{3}$.

➢ Деление дробей

Здесь у нас бОльшее разнообразие.

Дробь $\frac{a}{b}$ **делится на число** c следующим образом: $\frac{\frac{a}{b}}{c}=...$. Разделим, например, три четверти на пять: $\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$.

Число a **делится на дробь** $\frac{b}{c}$ следующим образом: $\frac{a}{\frac{b}{c}}=...$. Разделим, например, два на одну треть: $\frac{2}{\frac{1}{3}}=\frac{2\cdot 3}{1}=6$.

И, наконец, **дробь** $\frac{a}{b}$ **делится на дробь** $\frac{c}{d}$ по формуле: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=...$. Разделим две третьих на четыре девятых: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 4}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$, опять полторашка случайно получилась, хотя пиво я уже давно не пью ☺.

Осуществимы и обратные действия, то есть, из целого числа или дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь, например: $2=\frac{1}{\frac{1}{2}}$ *(один разделить на одну вторую)*, $\frac{5}{7}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{5}}$, и тому подобное.

- **Сложение дробей**

Технически это чуть более сложное действие. Впрочем, не всегда.

1) Если знаменатели одинаковые, то никаких проблем – знаменатель остаётся таким же, а числители складываются: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, например:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2,\qquad \frac{2}{7}+\frac{8}{7}=\frac{2+8}{7}=\frac{10}{7},\qquad \frac{5}{11}-\frac{8}{11}=\frac{5-8}{11}=-\frac{3}{11}$$

2) Если одно из чисел целое, то тоже никаких проблем: $\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{c\cdot b}{b}=\frac{a+c\cdot b}{b}$, например:

$$\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{4}{3},\qquad 2+\frac{2}{5}=\frac{10}{5}+\frac{2}{5}=\frac{12}{5},\qquad \frac{3}{10}-3=\frac{3}{10}-\frac{30}{10}=\frac{3-30}{10}=-\frac{27}{10}$$

3) Если знаменатели разные $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ $(b\neq d)$, то сначала нужно ***привести дроби к общему знаменателю***, проще всего, по формуле $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}$, например:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 2}{6}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6},\qquad \frac{3}{5}-\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{35}-\frac{6\cdot 5}{35}=\frac{21}{35}-\frac{30}{35}=\frac{21-30}{35}=-\frac{9}{35},$$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 6}{12}=\frac{10}{12}+\frac{18}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$$

В ряде случаев решение можно упростить, как, например, в последнем случае: $\frac{5}{6}+\frac{3}{2}$ – здесь вместо перемножения знаменателей выгодно преобразовать только вторую дробь, а именно домножить её знаменатель и числитель на три: $\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}+\frac{9}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$.

Вообще, это действие крайне важное, и поэтому выделим ему отдельный пункт:

➢ Как приводить дроби к общему знаменателю?

Выше я привёл «прямую» формулу приведения: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}$, но она далеко не всегда рациональна. Так, при сложении $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{3\cdot 15}{10\cdot 15}+\frac{2\cdot 10}{15\cdot 10}$ внизу получается 150, что многовато. Нельзя ли уменьшить это значение? Смотрим на знаменатели дробей: 10, 15 и замечаем, что **оба они делятся на 5**. Делим на 5 нашего монстра: $\frac{150}{5}=30$ – и полученное число должно подойти в качестве общего знаменателя. И в самом деле, 30 делится и на 10 и на 15. Делим $30:10=3$ – и домножаем на три числитель и знаменатель первой дроби: $\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}$. Теперь делим $30:15=2$ – и домножаем на два оба этажа второй дроби: $\frac{2}{15}=\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}$.

Таким образом: $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{9}{30}+\frac{4}{30}=\frac{13}{30}$

…много я тут наговорил, но на самом деле такой подбор выполнятся устно, и не всё так сложно ☺. **Принцип прост:** общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой дроби *(само собой)* **и быть как можно меньше** (по возможности). Запишу **общую формулу** *(не пугаемся)***:**

…, где $d_1=\frac{Z}{b}, d_2=\frac{Z}{d}$ – ***дополнительные множители***; общий знаменатель Z должен делиться на b и на d **и быть как можно меньше**.

Рассмотрим разность $\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x(x-1)}$. Здесь можно снова использовать прямую формулу $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{db}$ с общим знаменателем $x^2\cdot x(x-1)=x^3(x-1)$. Но есть более рациональная версия: $Z=x^2(x-1)$ – она делится **и на знаменатель первой дроби и на знаменатель второй**. Выполняем это деление – рассчитываем дополнительные множители: $d_1=\frac{Z}{b}=\frac{x^2(x-1)}{x^2}=(x-1)$, $d_2=\frac{Z}{d}=\frac{x^2(x-1)}{x(x-1)}=x$. Таким образом, по формуле:

$\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2\cdot(x-1)}{x^2\cdot(x-1)}-\frac{1\cdot x}{x(x-1)\cdot x}=\frac{2(x-1)}{x^2(x-1)}-\frac{x}{x^2(x-1)}=\frac{2(x-1)-x}{x^2(x-1)}$, вверху, как правило, раскрывают скобки и приводят подобные слагаемые: $\ldots=\frac{2x-2-x}{x^2(x-1)}=\frac{x-2}{x^2(x-1)}$

В качестве **проверки** выполним обратное действие – оно называется ***почленным делением*** *числителя на знаменатель*:

$\frac{2(x-1)-x}{x^2(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x^2(x-1)}-\frac{x}{x^2(x-1)}=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x(x-1)}$ – в результате получена исходная разность, что и требовалось проверить.

Нередко приходится приводить несколько дробей, например: $\frac{1}{2}+\frac{2}{x}-\frac{3}{4(x^2+1)}$. Здесь используются аналогичные формулы. Можно задействовать «прямой» вариант: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a\cdot df}{bdf}+\frac{c\cdot bf}{bdf}+\frac{e\cdot bd}{bdf}$ с общим знаменателем $2\cdot x\cdot 4(x^2+1)=8x(x^2+1)$, но нельзя ли его уменьшить? В данном случае можно: $Z=4x(x^2+1)$ – легко видеть, что он делится на знаменатель **каждой** дроби **и является минимальным**. Вычислим *дополнительные множители* $d_1=\frac{Z}{b}=\frac{4x(x^2+1)}{2}=2x(x^2+1),\ d_2=\frac{Z}{d}=\frac{4x(x^2+1)}{x}=4(x^2+1)$, $d_3=\frac{Z}{f}=\frac{4x(x^2+1)}{4(x^2+1)}=x$ и по формуле …:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{x}-\frac{3}{4(x^2+1)}=\frac{1\cdot 2x(x^2+1)}{2\cdot 2x(x^2+1)}+\frac{2\cdot 4(x^2+1)}{x\cdot 4(x^2+1)}-\frac{3\cdot x}{4(x^2+1)\cdot x}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)}{4x(x^2+1)}+\frac{8(x^2+1)}{4x(x^2+1)}-\frac{3x}{4x(x^2+1)}=\frac{2x(x^2+1)+8(x^2+1)-3x}{4x(x^2+1)}$$, допилим позже.

Проверка состоит в *почленном делении* числителя на знаменатель, многое тут сократится: $\frac{2x(x^2+1)+8(x^2+1)-3x}{4x(x^2+1)}=\frac{2x(x^2+1)}{4x(x^2+1)}+\frac{8(x^2+1)}{4x(x^2+1)}-\frac{3x}{4x(x^2+1)}=$ $=\frac{1}{2}+\frac{2}{x}-\frac{3}{4(x^2+1)}$ – и в результате мы получили исходную сумму.

Тренируемся самостоятельно:

Задание 2

а) Перевести десятичные дроби в обыкновенные и, если это возможно, сократить их: 0,2; –1,34; 2,625. Выполнить проверку делением числителя на знаменатель.

Выполнить следующие действия:

б) $\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{9}{4}$, $\quad\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\quad -3\cdot\frac{2x}{7}\cdot\left(-\sqrt{\frac{25}{9}}\right)$, $\quad\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{10}{3xy}\cdot\frac{2y^2}{5}$, $\quad\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$

в) разделить минус три на три седьмых, шесть тринадцатых на два, одиннадцать пятых на две трети.

г) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\quad\frac{5}{6}-2$, $\quad -3+5\cdot\frac{3}{4}$, $\quad\frac{1}{6}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}$, $\quad\frac{\frac{3}{14}+\frac{5}{21}}{3}$, $\quad\frac{2}{1+\frac{3}{5}}$

д) Привести к общему знаменателю: $\frac{2}{x+1}-1$, $\quad\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^3}$, $\quad\frac{2}{3x}-\frac{x}{x-2}+\frac{1}{2(x-2)^2}$.

е) Упростить дроби: $\frac{3x}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}}}$, $\quad\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+3y}{x}$, $\quad\frac{2ab}{\frac{a^2}{b}-5a}$.

1.6. Одночлены, многочлены и другие члены

И с теми, и с другими, и с третьими мы уже имели дело, и теперь настало время немного разобраться в понятиях.

Одночлен – это произведение, состоящее из числовых множителей и переменных в *целых неотрицательных* степенях, например: $1,\ 5k,\ 2a^2b,\ -7x^2,\ xy^2z^3$ и так далее.

В ходе вычислений одночлен часто появляется в «разобранном» виде, и тогда его записывают компактно: $2x\cdot 3x=6x^2$, $-\frac{1}{2}xy\cdot 3y=-\frac{3}{2}xy^2$, $-abc\cdot 2ab^3d=-2a^2b^4cd$.

Сумму степеней при различных переменных называют ***степенью одночлена***, так $6x^2$ – одночлен 2-й степени, $-\frac{3}{2}xy^2$ – одночлен 1 + 2 = 3-й степени и $-2a^2b^4cd$ – одночлен 2 + 4 + 1 + 1 = 8-й степени.

Если в произведении есть что-то ещё (корни, нечисловые дроби, другие функции), или другие действия, то это уже не одночлен: $x\sqrt{x}$, $\frac{2}{a}$, $3(a+b)^2$. Это просто член ☺

Многочленом называют сумму одночленов, например: $ab+c$, x^4-2x+3, причём первый также величают *двучленом*, а второй – *трёхчленом*. По количеству одночленов. ***Степенью многочлена*** является максимальная степень входящих в него одночленов. Так, первый многочлен имеет 2-ю степень (1 +1), а второй – 4-ю степень.

На практике вам могут встретиться как многочлены, так и сумма произвольных членов, и нижеследующие выкладки справедливы для обоих случаев. Продолжаем повторять алгебраические действия.

И вопрос первый: **какие члены можно складывать?** Сложить можно только ***подобные члены*** (*подобные слагаемые*):

➢ Приведение подобных слагаемых

Подобные слагаемые – это слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть.

Так, слагаемые $2a^2b^2+3b^2a^2$ – *подобны* (несмотря на перестановку множителей), но вот слагаемые $2a^2b^2+3a^2b$ – уже нет, поскольку хоть чуть-чуть, но отличаются буквенными частями.

При сложении подобных слагаемых их **буквенную часть** удобно ассоциировать с помидором: $2a^2b^2+3a^2b^2=5a^2b^2$ – два помидора плюс три помидора = пять помидоров.

Иными словами:

> При сложении подобных слагаемых нужно сложить их **числовые коэффициенты**, а буквенную часть оставить неизменной.

Дотошно можно записать так: $xyz-3xyz=(1-3)xyz=-2xyz$

Если буквенной части нет, то речь идёт о числах, которые тоже считаются подобными слагаемыми, причём среди них можно выделить свои подгруппы, простейший пример: … – тут в качестве «помидора» выступает $\sqrt{2}$.

В принципе, упрощение можно продолжить: $-2+3\sqrt{2}=-2+4{,}24264...=2{,}24264...$, но зачем нам длинные «хвосты» и десятичные дроби? Поэтому **оставляем результат в виде** $-2+3\sqrt{2}$ или даже лучше запишем его так: $3\sqrt{2}-2$, ибо «минус» спереди смотрится не айс.

Но на практике чаще встречаются «солянка»: $3x-2-4x+5$. Совершенно понятно, что здесь «иксы» нужно сложить с «иксами», а числа с числами: $3x-2-4x+5=-x+3$

Вот более трудный пример:

$$x^2+3x-5-x^3+2x-3x^2+11+x^3+7x+\sqrt{x}+1$$

Здесь удобно выполнить пометки карандашом (или выделить слагаемые как-то по-другому). Подчёркиваем все квадраты, отмечаем волной – все «иксы», обводим в кружок все числа и помечаем галочками все встретившиеся кубы:

$$\underline{x^2}+3x-5-x^3+2x-\underline{3x^2}+11+x^3+7x+\sqrt{x}+1=$$

Теперь слагаемые можно *перегруппировать*, расположив их в порядке убывания степеней:

$$=-x^3+x^3+x^2-3x^2+3x+2x+7x+\sqrt{x}-5+11+1=$$

После чего складываем подобные слагаемые **в каждой группе**, при этом кубы у нас ***взаимоуничтожаются***:

…, обращаю внимание, что эту сумму некорректно называть многочленом, поскольку одно из слагаемых не является одночленом.

Проделанные действия называют ***приведением подобных слагаемых***, и зачастую их не расписывают так подробно. Доведём до ума дробь из предыдущего параграфа:

$$\frac{2x(x^2+1)+8(x^2+1)-3x}{4x(x^2+1)}=\frac{2x^3+2x+8x^2+8-3x}{4x(x^2+1)}=...$$

Здесь подобных слагаемых почти нет, и я обошелся без пометок. Но в тяжелых случаях они строго рекомендованы, дабы ничего не потерять.

Иногда подобные не столь очевидны:

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-1}$$

Тут в качестве «буквенной части» выступает дробь, и для лучшего понимания я распишу решение так:

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x-1}+1\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}.$$

Вопрос второй:

➢ Как перемножать суммы?

С произведением одиночного члена на сумму никаких трудностей, по сути, это раскрытие скобок: $ab\left(\frac{a}{b}-c\right)=a^2-abc,\ \ x(x^2+2x-3)=x^3+2x^2-3x,\ \ \sqrt{x}(1+x)=\sqrt{x}+x\sqrt{x}$

Главное, **быть внимательным**. Заметьте также, что в 1-м примере после сокращения следует иметь в виду, что $b\neq 0$.

Но более занятное действие – это перемножение сумм. Следующее правило тоже справедливо как для многочленов, так и произвольных сумм, **читаем и осмысливаем:**

> **Чтобы умножить сумму на сумму** нужно **каждое** слагаемое одной суммы умножить на **каждое** слагаемое другой суммы

В частности: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. Порядок перемножения можно поменять: $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$. Либо начать умножение с любого слагаемого второй скобки. Кому как нравится, кому как удобнее. Например:

$$(2x+1)(3-x)=2x\cdot 3+2x\cdot(-x)+1\cdot 3+1\cdot(-x)=6x-2x^2+3-x=-2x^2+5x+3$$

Для более «навороченных» сумм формула аналогичная, в частности:

$(a+b)(c+d+e)=...$, например:

$(x-y)(x^2+y-1)=x\cdot x^2+x\cdot y+x\cdot(-1)+(-y)\cdot x^2+(-y)\cdot y+(-y)\cdot(-1)=$
$=x^3+xy-x-x^2y-y^2+y$, на практике так, конечно, подробно не расписывают, а выполняют умножение в уме:

$(x-y)(x^2+y-1)=x^3+xy-x-x^2y-y^2+y$, при этом помним, что один минус даёт минус, а два минуса дают плюс. Заметим заодно, что полученный результат не упростить, поскольку тут не оказалось подобных слагаемых.

Как перемножить три скобки? – самое простое $(a+b)(c+d)(e+f)$? Применяем правило умножения сумм два раза подряд:

$(a+b)(c+d)(e+f)=...=$ и теперь **каждое** слагаемое первой скобки умножаем на **каждое** слагаемое второй скобки:
$=ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf$

Как вариант, можно было сначала перемножить $(c+d)(e+f)$ и затем умножить $(a+b)$ на полученный результат.

Давайте что-нибудь простенькое: $(x+1)(x-2)(x+3)=(x^2-2x+x-2)(x+3)=$ приводим подобные в 1-й скобке и допиливаем пример: $=(x^2-x-2)(x+3)=$
$=x^3+3x^2-x^2-3x-2x-6=x^3+2x^2-5x-6$

Особый интерес представляет перемножение одинаковых или похожих сумм:

➢ Формулы сокращенного умножения

Эти формулы широко известны, эти формулы многие помнят, но, тем не менее. **Квадрат суммы**:

$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$ или кратко: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

аналогично для **квадрата разности**:

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=...$

Теперь перемножим сумму и разность:

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$ – эту формулу называют **формулой разности квадратов**.

Примеры:

$(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=4x^2+4x+1$,
$(x-\sqrt{3})^2=...$,
$(4+x)(4-x)=4^2-x^2=16-x^2$

Наряду с квадратами популярны и кубы, **куб суммы**:

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+b^2a+a^2b+2ab^2+b^3=$
$=a^3+3a^2b+...$

Аналогично выводится **куб разности**: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+...$.

Примеры:

$(1+\sqrt{3})^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}$
$(x-1)^3=x^3-3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2-1^3=x^3-3x^2+3x-1$

Также в ходу формулы **суммы кубов** и **разности кубов**:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Примеры:

$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$
$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$

Первые три формулы этого параграфа (квадраты) желательно помнить наизусть и сразу видеть возможность их применения. Впрочем, если что-то позабылось, то все эти формулы легко вывести с помощью правила перемножения сумм.

➢ Как представить сумму в виде произведения?

Это обратное действие, и самый простой случай – вынесение ***общего множителя*** за скобки: $x^2-2x=x(x-2),\quad ab+b=(a+1)b,\quad 3xyz^2+yz=yz(3xz+1)$.

Общий множитель можно найти даже там, где это совсем не очевидно: $2x+3y=2\left(x+\frac{3}{2}y\right)$ либо $2x+3y=3\left(\frac{2}{3}x+y\right)$, подобное вынесение широко используется в разных задачах высшей математики.

На практике часто приходится раскладывать *квадратный трёхчлен* ax^2+bx+c, но об этом мы поговорим позже, когда будем решать квадратные уравнения. Что касается многочленов более высоких степеней, то здесь ситуация более грустная – многие из них не удаётся разложить на множители, однако если вы заранее знаете или «подозреваете», что это возможно, то нужно использовать такую схему: $a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$.

Например: $x^3-2x^2+3x-6=x^2(x-2)+3(x-2)=(x^2+3)(x-2)$

Ну и, конечно же, не «зеваем» формулы сокращенного умножения, таки обведу их:

$a^2+2ab+b^2=...\qquad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=...$

$a^2-2ab+b^2=...\qquad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=...$

$a^3+b^3=...$

$a^2-b^2=...\qquad a^3-b^3=...$

Тренируемся:

Задание 3

а) Привести подобные слагаемые:
$1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5-3\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+7,\quad a(1+b)-ab^2-(1+ab),\quad 3\pi+2\pi x-\pi(1-x)$

б) Раскрыть скобки: $\frac{1}{2}x(x-2x^2),\quad (xy+1)(1-\sqrt[3]{x}),\quad x(x+1)(x-2),\quad (x-1)(x-\sqrt{x}+2)$,
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\quad (\sqrt{2}x+1)^2,\quad (x-2)(x+1)(2x+4),\quad (2x+3y)^3,\quad (x^2+x+1)(x-1)$

в) Доказать, что $(a-b)^2=(b-a)^2$. Вывести формулу для $(a+b)^4$ и $(a-b)^4$.

г) Разложить на множители: $a^3-3a^2,\quad x^2y+xy^2,\quad x^2-2,\quad x^2+4x+4,\quad 9x^2-6x+1$,
$x^3+x^2-x-1,\quad x^3+8,\quad x-x^4,\quad 8x^3-12x^2y-y^3+6xy^2$

д) Упростить дроби: $\frac{x^2+2x}{x\sqrt{x}},\quad \frac{2ab^2}{a^2-5ab},\quad \frac{x-1}{\sqrt{x-1}},\quad \frac{2x+4}{x^3-4x},\quad \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

Ваши ответы могут отличаться от моих перестановкой слагаемых и множителей.

1.7. Свойства степеней и корней

Быстренько вспоминаем, что такое *степень* – это свёрнутая запись произведения:

$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ раз}}$, при этом x называется *основанием* степени, а k – *показателем* степени или тоже *степенью*. Особый случай: $x^0 = 1$, если $x \neq 0$.

Повторим важные свойства степеней. Некоторыми из них мы уже вовсю пользовались, в частности:

Для того чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень **каждый** множитель: $(xy)^k = x^k y^k$. Правило работает для любого количества множителей.

Например: $(2a)^2 = 2^2 a^2 = 4a^2$, $(-3x)^3 = (-3)^3 x^3 = -27x^3$, $\left(\frac{2y}{3}\right)^2 = \frac{2^2 y^2}{3^2} = \frac{4y^2}{9}$ и т.п.

Следующее очевидное свойство следует из определения степени:

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить таким же, а показатели **сложить**: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.

! Не путать с «похожими» ситуациями! Для разных оснований $x^a \cdot y^b$ – правило **не работает**! Для суммы $x^a + x^b$ – **тоже нет**!

Например: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$, $x^2 \cdot x^5 \cdot x^{10} = x^{17}$, $e^x \cdot e = e^x \cdot e^1 = e^{x+1}$, при этом степень может быть и «навороченной»: $(x+1)^2(x+1)^3 = (x+1)^5$, $x^{x^2+1} \cdot x^{x+2} = x^{x^2+1+x+2} = x^{x^2+x+3}$ – **важно только, чтобы у них были одинаковые основания**.

Чтобы возвести степень в степень нужно перемножить показатели: $(x^a)^b = x^{b \cdot a}$

Примеры: $(3^2)^4 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$, $(x^3)^5 = x^{15}$, $((x^2+1)^2)^2 = (x^2+1)^4$ и более замысловатые, но такие же естественные: $(e^{3x})^2 = e^{2 \cdot 3x} = e^{6x}$, $\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x+1}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3 \cdot (x+1)} = \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x+3}$.

При переносе степени из знаменателя в числитель *(или наоборот)* **у показателя следует сменить знак:** $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$

Да, показатель степени может быть и отрицательным! Например: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$.

Числа a и a^{-1} $(a \neq 0)$ называют *взаимно* ***обратными***, их произведение равно: $a \cdot a^{-1} = 1$.

Другие примеры: …, ну и можно ещё немножко поизвращаться: $5 = 5^1 = \frac{1}{5^{-1}}$, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, такое тоже встречается ☺.

Следующее свойство вытекает из предыдущих:

Деление степеней с одинаковыми основаниями: $\dfrac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a+(-b)} = x^{a-b}$

Например: $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$, $\dfrac{x^3}{x^4} = x^{3-4} = x^{-1}$ и если присмотреться, то это обычное сокращение дроби: $\dfrac{3^7}{3^5} = \dfrac{3^5 \cdot 3^2}{3^5} = 3^2$, $\dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{x^3}{x \cdot x^3} = \dfrac{1}{x}$.

Разумеется, **все правила работают и в обратном направлении**, только что вот я «расщепил» степень на множители: $3^7 = 3^{5+2} = 3^5 \cdot 3^2$. Довольно часто приходится выделять степень в степени: $x^6 = (x^3)^2$, $(x-1)^4 = ((x-1)^2)^2$, а также «сбрасывать» степень в знаменатель: $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$, $(2x+1)^{-1} = \dfrac{1}{2x+1}$ и тому подобное.

Но и это ещё не все секреты! На самом деле **корень – это тоже степень**:

Радикал *(корень)* можно **записать в виде** $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, где $\dfrac{m}{n}$ – *обыкновенная* положительная дробь $(n \geq 2)$. При $n = 2$ получается квадратный корень: $\sqrt{x^m} = x^{\frac{m}{2}}$. Если же дробь отрицательна, то речь идёт о корне, который находится в знаменателе:

$x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, таким образом: ….

Обращаю ваше внимание, что **здесь не проводится никаких алгебраических действий:** $\sqrt[n]{x^m}$ и $x^{\frac{m}{n}}$ – это две разные ЗАПИСИ **одного и того же корня**.

Например: $\sqrt{x} = \sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{(x-1)^5} = (x-1)^{\frac{5}{4}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$

и давайте что-нибудь страшненькое: $\dfrac{1}{\sqrt[7]{(x+\ln 3x)^4}} = \dfrac{1}{(x+\ln 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\ln 3x)^{-\frac{4}{7}}$.

Корень $\sqrt[n]{x^m}$ часто записывают в виде $x^{\frac{m}{n}}$ для того, чтобы с комфортом взять от него производную или интеграл. И, кроме того, **это мощнейший инструмент для перемножения «разношёрстных» степеней и корней**, поскольку **рассмотренные выше свойства работают и для дробных показателей**:

$x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, после чего результат обычно снова представляют в виде корня: $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ *(с помощью той же формулы* $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ *).*

Главное, уметь приводить дроби к общему знаменателю:

$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=x^{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}}=x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$, ... так же легко выполняется *почленное деление* числителя на знаменатель:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{8}{6}-\frac{3}{6}}+2x^{\frac{1}{4}-\frac{2}{4}}=x^{\frac{5}{6}}+2x^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[6]{x^5}+\frac{2}{\sqrt[4]{x}}$$

и приведение к общему знаменателю:

$1+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}=\frac{1\cdot\sqrt{x}+2-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+2-3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ – полученный результат как раз можно проверить с помощью почленного деления.

Теперь повторим факты, которые касаются именно корней:

Если n – *чётное* число, бОльшее нуля, то корень $\sqrt[n]{x}$ определён **только для неотрицательных значений** x; если n – *нечётное* число, бОльшее единицы, то корень определён **для всех** x. Борода: $\sqrt{x}$, и ещё одна: $\sqrt[3]{x}$.

Корни вида …, определены **только для неотрицательных значений** x *(вне зависимости от того, чётное* n *или нечётное)*, например: $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt[10]{x^6}$ и тому подобное.

Вы спрОсите, а что не так с корнем $\sqrt[10]{(-1)^6}$? Вроде всё хорошо: $\sqrt[10]{(-1)^6}=\sqrt[10]{1}=1$. А дело вот в чём: показатель $\frac{6}{10}$ можно записать в виде *несократимой* дроби $\frac{3}{5}$, и тогда $\sqrt[5]{(-1)^3}=\sqrt[5]{-1}=-1$. Но дроби $\frac{6}{10}$ и $\frac{3}{5}$ задают одно и то же число! Во избежание этого парадокса и принято считать, что такие корни определены лишь для $x\ge 0$. Далее:

Если m делится на n, то корень … определён **для всех значений** x, при этом $\sqrt[n]{x^{k\cdot n}}=|x^k|$, если k – *нечётное*, и $\sqrt[n]{x^{k\cdot n}}=x^k$, если k – *чётное*.

В частности, при $m=n$: …, если n – *чётное* и $\sqrt[n]{x^n}=x$, если n – *нечётное*.

Самый популярный случай: $\sqrt{x^2}=|x|$, например: $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$ - как мы помним, модуль уничтожает возможный знак «минус». А вот здесь модуль не нужен: $\sqrt{x^4}=x^2$ – поскольку «икс квадрат» и так неотрицателен. К слову, при *частичном вынесении* модуль тоже не нужен: $\sqrt{x^3}=\sqrt{x^2\cdot x}=x\sqrt{x}$, ибо отрицательным здесь «икс» быть не может.

Другие примеры: $\sqrt[3]{x^3}=x$, $\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{x^3\cdot x^2}=x\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[5]{x^{13}}=\sqrt[5]{x^{10}\cdot x^3}=x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}$ и т.п.

Следует добавить, что все перечисленные факты справедливы и в том случае, если корень расположен в знаменателе.

Среди «вычислительных» свойств наиболее важнЫ следующие, и ими мы тоже пользовались:

Если $x \ge 0,\ y \ge 0$, то $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$, и если $y \ne 0$, то $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Если множители отрицательны, то возможны варианты. Так, корень $\sqrt{(-1)\cdot(-2)}$ «расщеплять» **нельзя**. Но вот с корнем $\sqrt[3]{(-1)\cdot(-2)}$ это вполне себе «прокатывает».

Другие практически значимые свойства:

Для натуральных k, m, n и $x \ge 0$ справедливо следующее:
… *(сокращение)*, а также: … и ….
Последние два факта элементарно выводятся из свойства $(x^a)^b = x^{b \cdot a}$.

Примеры: $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$, $(\sqrt[4]{10})^3 = \sqrt[4]{10^3}$, впрочем, в высшей математике эти действия приходится выполнять не так часто.

И ещё одно свойство, даже не свойство, а некоторая **неожиданность**, с которой сталкиваются пионеры: если мы извлекаем корень из числа $0 < a < 1$, то результат будет **больше** этого числа, например: $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, $\sqrt[3]{0{,}7} \approx 0{,}89$. И, наоборот, если число $a > 1$, то результат будет **меньше**, например: $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}05$, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$ (что более «естественно»).

Кроме того, есть и другие свойства, но они не особо актуальны в массовой практике, порешаем лучше примеры:

Задание 4

а) Упростить: $x^2 \cdot (x^3)^4$, $\frac{(2xy^2)^3}{4x^2}$, $3ab^2 \cdot (ab)^{-2}$, $\frac{e^{x^2} \cdot e^{-x}}{e^2}$, $(e^{x^2})^2$, $(2^x)^{\frac{1}{x}}$, x^{x^x}

б) Выполнить действия и записать результат в виде корня:
$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$, $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}$, $x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^5}$, $\frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}{x}$.

в) Разделить почленно: $\frac{2x + \sqrt{x}}{x^2}$, $\frac{1 - x + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$, $\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} - 2x}{x\sqrt[3]{x}}$

г) Привести к общему знаменателю: $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x(x+1)}$, $\frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}}$, $\frac{3}{x} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

д) Преобразовать: $\sqrt[6]{36}$, $\frac{\sqrt{x^5}}{x}$, $\sqrt[4]{x^9}$, $\sqrt{8x^6}$, $\sqrt[3]{(-x)^3}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}}$, $(\sqrt[4]{(x^2+1)^3})^{\frac{4}{3}}$

Решения и ответы в конце книги.

1.8. Прогрессии

Под ***прогрессией*** понимают **упорядоченный список** *(последовательность)* чисел, в котором есть определённая закономерность. Этот список может быть конечным или бесконечным.

➢ Арифметическая прогрессия

Это последовательность с равными расстояниями между соседними числами, например:

–8, –3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, … – каждый следующий член данной прогрессии на 5 больше предыдущего. Это расстояние называют ***разностью*** *арифметической прогрессии*.

Чтобы задать *арифметическую прогрессию* достаточно указать её первый член $a_1 = -8$ и разность $d = 5$. «Энный» член определяется формулой $a_n = a_1 + d(n-1)$. Найдём, скажем, двадцатое число в списке: $a_{20} = -8 + 5 \cdot (20-1) = -8 + 5 \cdot 19 = -8 + 95 = 87$.

Чтобы найти сумму *первых «эн» членов* $a_1 + a_2 + ... + a_n$, их, конечно, не нужно складывать на калькуляторе ☺, для этого тоже есть формула: $S_n = ...$. Найдём, например, сумму первых пятидесяти членов. Сначала по той же формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ определяем пятидесятый член: $a_{50} = -8 + 5 \cdot 49 = -8 + 245 = 237$, и с суммой никаких проблем: $S_{50} = \frac{-8+237}{2} \cdot 50 = 229 \cdot 25 = 5725$.

Кроме того, легко составить комбинированную формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и воспользоваться ей: $S_{50} = \frac{2 \cdot (-8) + 5 \cdot 49}{2} \cdot 50 = (-16 + 245) \cdot \frac{50}{2} = 229 \cdot 25 = 5725$

➢ Геометрическая прогрессия

Наверняка вы слышали выражение, что что-то растёт в геометрической прогрессии. Это означает очень быстрый рост – рост в разЫ. А если это что-что в геометрической прогрессии убывает, значит, оно со стремительным ускорением стремится к нулю.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой $b_1 \neq 0$, а каждый последующий получается умножением предыдущего на некоторое число $q \neq 0$. Это число называют ***знаменателем*** *геометрической прогрессии*.

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то прогрессия является **растущей**. Например:

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, … – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на 3. *Знаменатель* прогрессии определяется элементарно – делим любой член (кроме первого) на предыдущий: $q = \frac{18}{6} = 3$.

Если же $-1 < q < 1$, то прогрессия **убывает**: $6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ ...$ – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на $q = \frac{1}{2}$.

Если $q < 0$, то прогрессия будет ***знакочередующейся***, например:

$1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ -\frac{8}{27},\ \frac{16}{81},\ -\frac{32}{243},\ldots \qquad \left(q=-\frac{2}{3}\right)$

$-3,\ 6,\ -12,\ 24,\ -48,\ 96,\ldots \qquad (q=-2)$

Любой член геометрической прогрессии легко определить по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Найдём, например, 10-й член последней прогрессии: $b_{10} = -3\cdot(-2)^9 = -3\cdot(-512) = 1536$.

Сумма *первых n членов* геометрической прогрессии рассчитывается по формуле:

$S_n = \frac{\ldots}{1-q}$, обратите внимание, что для этого не нужно знать b_n («энный» член)

В качестве примера вычислим сумму $2+6+18+54+162+486+1458$. У этой прогрессии $b_1 = 2,\ q = 3$, и подсчитываем мы сумму $n = 7$ членов:

$$S_7 = \frac{2\cdot(1-3^7)}{1-3} = \frac{2(1-2187)}{-2} = -(-2186) = 2186$$

Однако особый интерес представляет ***бесконечно убывающая*** *геометрическая прогрессия*. Это прогрессия бесконечным количеством членов и основанием $-1 < q < 1$, пример уже был:

$6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \ldots$ – члены такой прогрессии *стремятся* к нулю.

Но главная «фишка» состоит в том, что сумма бесконечного количества членов… равна *конечному* числу! И особо приятно, что для расчёта этой суммы существует очень простая формула: $S = \frac{b_1}{1-q}$. В нашем примере $b_1 = 6,\ q = \frac{1}{2}$, и мы счастливы:

$S = 6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\ \ldots = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 6\cdot 2 = 12$ – главное, правильно упростить трёхэтажную дробь.

Символические задачки для самостоятельного решения:

Задание 5

а) Вычислить сумму арифметической прогрессии (2 штуки):

$8+15+22+29+\ldots+302, \qquad 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$

б) Вычислить сумму геометрической прогрессии (3 штуки):

$1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ -\frac{8}{27},\ \frac{16}{81} \qquad 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{128},\ldots \qquad \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{625},\ldots$

Решения с комментариями в конце книги.

2. Уравнения и неравенства

Сначала одно, затем другое:

2.1. Понятие уравнения. Простейшие примеры

Уравнение – это **равенство**, которое содержит переменную. Исторически они появились в ходе решения реальных задач, например: *Петя дал Маше 3 яблока, после чего у него осталось 5 яблок. Сколько яблок было у Пети?* Пусть у Пети было x яблок, тогда:

$x-3=5$

Любое уравнение состоит из *левой части*, *правой части* и знака «равно».
Корень уравнения – это ТАКОЕ значение переменной, которое обращает уравнение в **верное числовое равенство**.

Очевидно, что корнем данного уравнения является $x=8$ *(яблок было у Пети)* – при подстановке этого значения получается:

$8-3=5$
$5=5$ – верное числовое равенство.

Также говорят, что значение $x=8$ **удовлетворяет** данному уравнению. Все остальные значения «икс» корнями не являются – они, попросту говоря, «не подходят». Подставим, например, десять:

$10-3=5$
$7=5$ – в результате получено **неверное** числовое равенство, следовательно, значение $x=10$ не является корнем уравнения $x-3=5$.

Решить уравнение – это значит найти ВСЕ его корни или доказать, что их не существует.

Да, уравнение может иметь 2, 3, 4 и даже бесконечное количество корней. Или не иметь их вовсе.

Так, уравнение $x(x-2)=0$ имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=2$ – каждое из этих значений обращает уравнение в верное равенство.

А вот это уравнение имеет бесконечно много корней:

$(-1)^n=1$, а именно корнями являются все *чётные* числа: $n=\{\dots-4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

Ещё одно особое уравнение:

$0\cdot x=0$ – ему удовлетворяет вообще любое значение «икс».

Теперь противоположные примеры:

$x^2=-1$ – это уравнение не имеет действительных корней, так как любое число в квадрате неотрицательно.

$3^x=0$ – здесь тоже нет корней – по той причине, что положительное число в любой степени – положительно.

2.2. Преобразование уравнений

В этом параграфе мы поговорим о том, что можно делать с уравнениями, а чего делать нельзя. И что можно, но осторожно. Весьма содержательный пример встретился в Задании 5, где уравнение как раз возникло в ходе решения конкретной задачи:

$302 = 8 + 7(n-1)$

В любой части уравнения (и слева, и справа) **можно выносить множители за скобки и скобки раскрывать**:

$302 = 8 + 7n - 7$

В любой части **можно** приводить подобные слагаемые:

$302 = 1 + 7n$

Части уравнения можно менять местами, они абсолютно равноценны:

$1 + 7n = 302$

Любое слагаемое можно перенести в другую часть, сменив у него знак:

$7n = 302 - 1$
$7n = 301$

Обе части можно умножать / делить на одно и то же число, отличное от нуля:

$\frac{7n}{7} = \frac{301}{7}$

$n = 43$

Выполненные преобразования являются ***равносильными*** – **они никак не влияют на переменную и корни уравнения**. Но мы могли допустить ошибку в вычислениях, и поэтому **обязательно выполняем проверку:** подставим найденное значение $n = 43$ в **исходное** уравнение $302 = 8 + 7(n-1)$:

$302 = 8 + 7(43-1)$

$302 = 8 + 7 \cdot 42$

$302 = 8 + 294$

$302 = 302$ – в результате получено верное равенство, значит, $n = 43$ действительно является корнем данного уравнения. И здесь я хочу сформулировать **вторую практическую аксиому:**

Если что-то можно проверить, то стараемся это проверить

…прямо таки жизненный и даже философский принцип получился ☺. В важных задачах лучше проверять даже устные вычисления – например, с помощью калькуляторов, которые приложены к этому курсу. Ибо никто не застрахован от ошибок по «глюку».

Кроме того, есть многочисленные онлайн сервисы для решения различных задач. Но тут я должен **предостеречь**: 1) они могут работать с ошибками *(а кто их создал?),* 2) машинное решение некоторых задач выглядит вычурно и неуклюже – так не станет решать ни один вменяемый человек, 3) и поэтому ответы могут быть представлены в другом, «нечеловеческом» виде :)) Однако для проверки такие сервисы (качественные) во многих случаях годятся.

Следующий момент касается уравнений вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *(пусть* a, b, c *и* d *не равны 0).* Для краткости я буду называть это правило ***правилом пропорции***, сформулирую его в вольном стиле: **множители, которые находятся вверху, можно «сбрасывать» на нижний этаж противоположной части**. И обратно: **множители, которые находятся внизу, можно «поднимать» в числитель противоположной части**.

Крутим-вертим:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{bc}{d}, \quad ad=bc, \quad ...$ и так далее – смотря что вам нужно выразить в той или иной задаче.

Справка: $\Rightarrow$ *– значок следствия («из этого следует это»)*

На практике часто выполняют «поднятие» множителей – для того, чтобы избавиться от дробей, при этом **особое внимание следует проявить, если «поднимаемый» множитель может обращаться в ноль**. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{2x+7}{1+x}=3$$

Первое действие очевидно – поднимаем сумму на верхний этаж правой части:

$2x+7=3(1+x)$, но здесь мы совершили ***неравносильное*** преобразование. Далее следует иметь в виду, что значение $x=-1$ не может являться корнем уравнения, ибо сумма-то $1+x$ была в знаменателе.

Берём это на заметку и продолжаем. Раскрываем скобки в правой части:

$2x+7=3+3x$,

после чего собираем все «иксы» в левой части, а константы – в правой, не забывая при переносе слагаемых сменить у них знаки:

$2x-3x=3-7$,

приводим подобные слагаемые:

$-x=-4$

и умножаем обе части на -1:

$x=4$

Проверка: подставим найденное значение в <u>исходное</u> уравнение:

$$\frac{2\cdot 4+7}{1+4}=3$$

$$\frac{15}{5}=3$$

$3=3$ – в результате получено верное равенство, значит, $x=4$ действительно является корнем уравнения $\frac{2x+7}{1+x}=3$.

Теперь о том, чего делать **нельзя**: **нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную. Это ведёт к потере корней. Запишите, запомните, зазубрите!** Так, если мы сократим уравнение $x(x-1)=x(x+2)$ на «икс», то **потеряем** корень $x=0$ *(который обращает уравнение в верное равенство* $0=0$*).*

И даже здесь: $(x^2+1)(...)=(x^2+1)(...)$ – сокращать на x^2+1 НЕ НАДО – поскольку уравнение $x^2+1=0$ имеет два **комплексных корня**, которые мы потеряем. Хоть это и не принципиально для решения школьных задач, но все равно является дурным тоном.

Итак, множители с переменными не сокращаем!

Обе части уравнения можно возвести в степень, но при этом могут появиться *посторонние корни*. Так, чтобы решить уравнение $\sqrt{x+2}=x$ нужно возвести обе его части в квадрат: $x+2=x^2$, и полученное уравнение $x^2-x-2=0$ будет иметь два корня: $x_1=-1, x_2=2$. Однако исходному уравнению удовлетворяет лишь значение $x_2=2$, что выясняется прямой подстановкой. Корень же $x_1=-1$ является *посторонним*, ибо:

$\sqrt{-1+2}=-1$

$\sqrt{1}=-1$ – неверное равенство. Этот корень также можно отфильтровать из тех соображений, что *арифметический квадратный корень* неотрицателен: $\sqrt{x+2}=x\geq 0$.

Следует отметить, что посторонних корней может и не оказаться, всё зависит от того или иного примера. Но заморачиваться тут не нужно – подставляем и выясняем!

Кстати, что это за уравнение $x^2-x-2=0$ и как отыскать его корни? …Многие вспомнили, что это мегапопулярное:

2.3. Квадратное уравнение

Данное уравнение имеет вид $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – числа, при этом $a\neq 0$.

Начнём с частных случаев. Если коэффициенты «бэ» и «цэ» равны нулю, то уравнение $ax^2=0$ можно сократить на «а» и записать его виде $x\cdot x=0$. Это уравнение имеет два *совпавших* или, как говорят математики, ***кратных*** корня: $x_1=x_2=0$.

Если нулю равен коэффициент «бэ», то квадратное уравнение принимает вид $ax^2+c=0$ и тут две ветки. Если **оба** коэффициента положительны или оба отрицательны, то уравнение имеет два комплексных корня, типичный пример уже был выше: $x^2+1=0$. Если же коэффициенты **разных** знаков, то дело сводится к уравнению $x^2=-\frac{c}{a}$, которое имеет два корня: $x_1=-\sqrt{\frac{c}{a}}$ и $x_2=\sqrt{\frac{c}{a}}$. Так, уравнение $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ имеет корни $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}$, в чём легко убедиться прямой подстановкой.

И, наконец, сладкий случай, когда $c=0$: $ax^2+bx=0$ – выносим «икс» за скобки: $x(ax+b)=0$ и корни выкатываются на блюдечко с голубой каёмочкой: $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$, даже пример приводить неловко :)

Теперь **общий случай** $ax^2+bx+c=0$, где все коэффициенты отличны от нуля. И сразу то самое уравнение: $x^2-x-2=0$.

Чтобы решить такое уравнение, нужно вычислить ***дискриминант*** – по **формуле**:
$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$

На втором шаге извлекаем квадратный корень из дискриминанта:
$\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$

Если корень получился «плохим», например $\sqrt{17}$, то без паники. Перепроверьте дискриминант. Если квадратное уравнение появилось в ходе решения задачи, то, возможно, вы допустили ошибку где-то ранее. Но бывает и так, что в условии опечатка либо… так и было задумано! **Потому что в любом случае квадратное уравнение разрешимо и имеет ровно два корня**:

1) Если $D<0$, то уравнение имеет два *сопряжённых* **комплексных корня**. Это выходит за рамки школьной программы, но для страждущих я ещё раз поставил ссылку ☺

2) Если $D=0$, то уравнение имеет два *совпавших* (кратных) действительных корня, которые определяются по формуле $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.

3) И, наконец, $D>0$. Здесь уравнение имеет два действительных корня:
$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, … – обычно их располагают в порядке возрастания.

В нашем примере:
$x_1=\frac{-(-1)-3}{2\cdot 1}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ и $x_2=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$

Не забываем о проверке! Самостоятельно подставьте найденные значения в уравнение $x^2-x-2=0$ и убедитесь, что получаются верные равенства.

Следует отметить, что рассмотренный алгоритм формально применИм и для любого частного случая, которые мы разобрали в начале параграфа. А в его заключение – ОЧЕНЬ важная и обещанная вещь:

В практических задачах часто требуется разложить квадратный трёхчлен ax^2+bx+c на множители. Для этого нужно решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и воспользоваться **формулой**:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни данного уравнения.

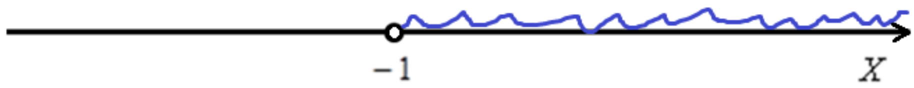
Так, уравнение $x^2-x-2=0$ имеет корни $x_1=-1, x_2=2$, и по формуле:

$x^2-x-2=1\cdot(x-(-1))(x-2)=(x+1)(x-2)$ – самостоятельно перемножьте суммы и убедитесь, что получается исходный трёхчлен. Это, кстати, легко сделать устно.

2.4. Неравенства

Неравенство, как и уравнение, содержит две части, но разделены они не знАком $=$ *(равно)*, а одним из следующих знаков: $>$ *(больше)*, или $<$ *(меньше)*, или $\geq$ *(больше либо равно)*, или $\leq$ *(меньше либо равно)*. Первые два неравенства называют ***строгими***, а последние два – ***нестрогими***.

Решением неравенства обычно являются не отдельные изолированные значения переменной, а целые промежутки значений. Так, неравенству $x > -1$ («*икс» больше минус одного*) соответствует интервал $(-1; +\infty)$:



Легко проверить, что любое «икс» из этого промежутка удовлетворяет данному неравенству, подставим, например $x = 0$:

$0 > -1$ – в результате получено **верное числовое неравенство**, значит, значение $x = 0$ является одним из решений неравенства $x > -1$.

Обратите внимание, что значение $x = -1$ не является решением, поскольку при его подстановке получается «неправда»:

$-1 > -1$ – **неверное числовое неравенство**.

И, естественно, *неверное неравенство* получится при подстановке любого «икс» из незаштрихованного промежутка.

Пример *нестрогого* неравенства: $x \leq \frac{1}{3}$ *(«икс» меньше либо равно одной трети)*.

Решением этого неравенства является полуинтервал $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$:

Самостоятельно подставьте в неравенство несколько значений «икс» и посмотрИте, что будет получаться.

Но то были простейшие случаи – по сути, готовые решения. На практике неравенства приходится решать.

Решить неравенство – это значит найти ВСЕ значения переменной, которые обращают его в ВЕРНОЕ **числовое неравенство**.

Чаще всего решением является один или несколько промежутков. Иногда бесконечное количество промежутков. Встречаются и точечные решения, так, решением неравенства $(x+1)^2 \leq 0$ является единственное значение: $x = -1$. А иногда решений может не быть вовсе, например:

$x^2 + 1 < 0$ – это неравенство не имеет решений, да и неравенство $x^2 < 0$ – тоже.

2.5. Действия с неравенствами

С неравенствами можно делать всё то же самое, что и с уравнениями, но есть пара отличий. В качестве примера решим неравенство $2-3x<4(2-x)$.

В любой части неравенства можно выносить за скобки и раскрывать скобки:

$2-3x<8-4x$

Части неравенства можно менять местами, но тогда **у неравенства нужно «развернуть» и значок:**

$8-4x>2-3x$ – что логично, осмЫслите это действие!

Слагаемые можно переносить из части в часть, меняя у них знаки:

$-4x+3x>2-8$

В обеих частях можно приводить подобные слагаемые:

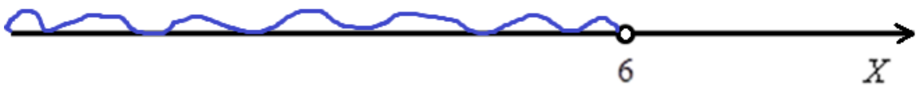
$-x>-6$

Обе части неравенства можно умножить на <u>одно и то же</u> число, отличное от нуля, но если это число отрицательное, то значок неравенства следует сменить на противоположный *(например, если было $<$, то станет $>$; если было $\geq$, то станет $\leq$).* В нашем случае обе части неравенства умножаются на –1:

$-1\cdot(-x)<-1\cdot(-6)$ и по итогу получается:

$x<6$

Изобразим решение графически *(что часто требуется)*:



и выполним **проверку**. Подставим в **исходное** неравенство $2-3x<4(2-x)$ какое-нибудь значение из области решения, проще всего взять $x=0$:

$2-3\cdot 0<4(2-0)$

$2<8$ – в результате получено **верное неравенство**, но на самом деле это ещё ни о чём не говорит. Ибо мы могли решить неравенство неправильно (получить, скажем, $x<4$) и тогда значение $x=0$ тоже бы «подошло».

Поэтому для пущей уверенности в неравенство $2-3x<4(2-x)$ следует подставить «пограничное» значение *(см. чертёж)*, а именно $x=6$:

$2-3\cdot 6<4(2-6)$

$2-18<4\cdot(-4)$

$-16<-16$ – обратите внимание, что и слева и справа получилось **одинаковое число**, и это верный признак того, что мы правильно выполнили все преобразования. Итак, в результате получено неверное числовое неравенство, значит, значение $x=6$ не является решением, как оно и есть на самом деле.

Как решать более сложные неравенства? Например, $x^2+2x-3>0$, $\frac{x^2(x+2)}{x-1}\le 0$?

Для этого существует:

2.6. Метод интервалов

Объяснять буду сразу на конкретном примере: $x^2+2x-3>0$. Кстати, все ли до конца понимают то, что нам предстоит сделать? Здесь нужно определить при каких «икс» квадратный трёхчлен будет больше нуля. Итак, как решить это неравенство?

На первом шаге нужно решить соответствующее уравнение, а также определить все недопустимые значения «икс». Что касаемо недопустимых значений, то их здесь нет, поскольку квадратный трёхчлен x^2+2x-3 определён для всех «икс». А вот с розыском корней придётся потрудиться – решаем квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$.

Используя стандартный алгоритм, рассчитываем дискриминант:

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ – отлично, извлекаем корень:

$\sqrt{D}=\sqrt{16}=4$ и находим сами корни:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2-4}{2\cdot 1}=\frac{-6}{2}=-3,\quad x_2=\ldots$$

Не забываем о проверке! – мысленно подставляем значения $x_1=-3$, $x_2=1$ в уравнение $x^2+2x-3=0$ и убеждаемся, что получаются верные равенства.

На втором шаге отмечаем на числовой прямой все «нелегальные» точки и все корни. Поскольку наше неравенство *строгое*, то корни «выкалываем»:

…

Теперь нужно определить знаки, в нашем случае трёхчлена x^2+2x-3, **на полученных интервалах**. Как это сделать? Если квадратный трёхчлен больше (либо меньше) нуля **в какой-либо точке интервала**, то он больше (либо меньше) нуля **и во всех точках этого интервала**. В этом и состоит суть метода интервалов:

1) Рассмотрим интервал $(-\infty,-3)$. Выберем **любое** значение, принадлежащее этому интервалу, выгодно взять $x=-4$, и подставим его в трёхчлен:

$(-4)^2+2\cdot(-4)-3=16-8-3=5>0$, значит трёхчлен больше нуля **и во всех** точках этого интервала.

2) Рассмотрим интервал $(-3,1)$ и подставим в трёхчлен наиболее удобное значение $x=0$: $0^2+2\cdot 0-3=-3<0$, значит, трёхчлен меньше нуля **и во всех** точках интервала.

3) И, наконец, интервал $(1,+\infty)$ с подопытной точкой $x=2$:

$2^2+2\cdot 2-3=5>0$, значит, трёхчлен положителен **и во всех** точках этого интервала.

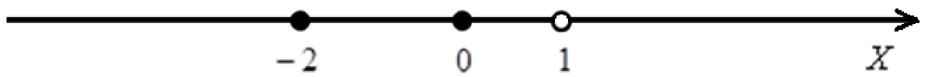
Перечисленные подстановки выполняют устно, а результаты (полученные знаки) отмечают на чертеже. При этом нужные интервалы удобно заштриховать:

…

Таким образом, решением неравенства являются два интервала, и **ответ** часто записывают в виде *объединения* промежутков: $x^2+2x-3>0$, если $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

Используя *метод интервалов*, решим неравенство $\frac{x^2(x+2)}{x-1}\le 0$ – здесь нужно найти все значения «икс», при которых дробь будет *меньше либо равна* нулю.

Сначала определим недопустимые значения «икс» и корни соответствующего уравнения: $\frac{x^2(x+2)}{x-1}=0$. И те и другие точки виднЫ невооружённым глазом: у нас есть нелегальное значение $x=1$, которое обращает знаменатель в ноль, и корни $x_1=-2,\ x_2=0$. Первую точку следует «выколоть», а вот корни «затушевать» – по той причине, что неравенство *нестрогое*:



Теперь определим знаки дроби $\frac{x^2(x+2)}{x-1}$ на полученных интервалах:

1) Подставим значение $x=-3$ из интервала $(-\infty,-2)$:

$\frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-1}=\frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-1}=\frac{9\cdot(-1)}{-4}=\frac{9}{4}>0$, значит, дробь больше нуля **и во всех точках этого интервала**

2) Из интервала $(-2,0)$ удобно выбрать значение $x=-1$:

$\frac{(-1)^2(-1+2)}{-1-1}=\frac{1\cdot 1}{-2}<0$, значит, дробь меньше нуля **и на всём интервале**.

3) Из интервала $(0,1)$ я выберу точку $x=0{,}5$:

$\frac{(0{,}5)^2(-0{,}5+2)}{-0{,}5-1}=\frac{(0{,}5)^2\cdot 1{,}5}{-1{,}5}<0$, значит, дробь отрицательна и на этом интервале.

4) И, наконец, из интервала $(1,+\infty)$ возьмём значение поменьше, а именно $x=2$:

$\frac{2^2(2+2)}{2-1}>0$ – заметьте, что для определения знака зачастую не обязательно проводить вычисления или доводить их до конца.

Отмечаем на чертеже знаки и штрихуем нужные нам интервалы:

…

Ответ: $\frac{x^2(x+2)}{x-1}\le 0$, если $x\in[-2,1)$

Что делать, если справа не ноль, а что-то другое? С помощью преобразований получить справа ноль ☺. Возможно, потребуется ещё «причесать» левую часть: привести дроби к общему знаменателю, привести подобные слагаемые и т.п.

А что делать, если нет ни «выколотых» значений, ни корней? Всё просто – у нас один интервал (вся числовая прямая) и мы подставляем в неравенство **любое** значение «икс». Если получено верное числовое неравенство, то решением является вся числовая прямая. Если же получено неверное неравенство, то неравенство не имеет решений.

Решим, например, неравенство $x^2+x+1<0$. У соответствующего уравнения $x^2+x+1=0$ нет корней, поскольку дискриминант отрицателен: $D<0$. И мы просто подставляем в неравенство любое «икс», проще всего взять ноль:

$0^2+0+1<0$

$1<0$ – в результате получено неверное числовое неравенство, следовательно, неравенство $x^2+x+1<0$ не имеет решений.

Ну и легко понять, что решением неравенства $x^2+x+1>0$ будет любое «икс».

Иногда из области рассмотрения следует исключить целые промежутки. Забегая вперёд, приведу неравенство с натуральным логарифмом: $\ln(2x+3)<0$. «Начинка» любого логарифма строго положительна: $2x+3>0$, а значит, нам нужно рассмотреть не всю числовую прямую, а лишь участок, где: $2x>-3 \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$. Дорешаем позже!

2.7. Уравнения и неравенства с модулем

Напоминаю, что модуль или *абсолютное значение* числа – это его расстояние от начала координат, и технически всё выглядит так, что модуль «уничтожает» возможный знак «минус»: $|4|=4,\quad |-4|=4,\quad |0|=0,\quad \left|\frac{10}{3}\right|=\frac{10}{3},\quad |-2{,}5|=2{,}5$. Из этого следует, что **уравнение** $|x|=a$ **имеет два корня**: $x_1=-a,\ x_2=a$. Если $a=0$, то корень один.

Зачем нужен модуль? Он используется в умных фразах ☺. Например: *абсолютное значение критической температуры составляет 50 градусов по Цельсию*. По сути, это высказывание представляет собой уравнение $|t_{крит.}|=50^\circ$ с решениями $t_{.1}=-50^\circ,\ t_{.2}=50^\circ$. И если эти значения будут превышены *по модулю*, то, видимо, настанет кирдык.

Если «начинка» модуля более сложная, например, $|2x-1|=3$, то уравнение разруливается по той же схеме, а именно, нужно решить два уравнения:

…

Мысленно подставьте $x_1=-1,\ x_2=2$ в модуль и убедитесь в том, что это корни.

Если «начинка» модуля *неотрицательна*, то модуль становится ненужным и его можно убрать: $|x^2|=x^2$. Также модуль исчезает при возведении его в квадрат: $|x|^2=x^2$. Разумеется, ВМЕСТО «икс» здесь тоже может быть сложное выражение.

Кроме того, уравнение может оказаться ещё более сложным и тогда от модуля избавляются прямо по ходу решения. В этом случае оно распадается опять же на две ветки **по формуле**: ….

ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение, так уравнение $x\cdot|2-x|=2x+5$ раскладывается на следующие части:

$$\begin{cases} x\cdot(2-x)=2x+5, & \text{если} \quad 2-x\ge 0 \\ x\cdot(-(2-x))=2x+5, & \text{если} \quad 2-x<0 \end{cases}$$

1) Решим первое уравнение, при этом нас устроят **только те корни** *(если они вообще есть)*, которые удовлетворяют условию $2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2$ *(все поняли переход?)*:

$2x-x^2=2x+5$

$x^2=-5$ – полученное уравнение не имеет действительных корней.

2) Решим второе уравнение: $x\cdot(x-2)=2x+5$, возможные корни которого должны соответствовать условию $2-x<0 \Rightarrow x>2$:

$x\cdot(x-2)=2x+5$

$x^2-2x=2x+5$

$x^2-4x-5=0$

Вычислим дискриминант:

$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=16+20=36$, корень из него $\sqrt{D}=\sqrt{36}=6$ и найдём корни:

$$x_1=\frac{4-6}{2}=-1, \quad x_2=\frac{4+6}{2}=5$$

Условию $x>2$ удовлетворяет только второй корень – самостоятельно подставьте оба значения в исходное уравнение и убедитесь в том, что это действительно так.

Таким образом, уравнение $x\cdot|2-x|=2x+5$ полностью решено, и имеет оно единственный корень $x_2=5$.

Бывает, модуль возникает в ходе решения других уравнений. Типичный пример:

$(x-2)^2=3$

Да, здесь можно возвести в квадрат, привести подобные слагаемые и решить квадратное уравнение. Но зачем? Есть путь короче! Извлекаем квадратный корень из обеих частей (ещё одно, кстати, действие с уравнениями):

$\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{3}$ и вспоминаем, что в этом случае необходимо поставить модуль:

$|x-2|=\sqrt{3}$

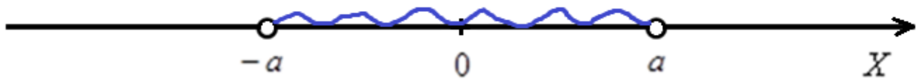
после чего решение входит в знакомую колею:

1) $x-2=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x_1=2+\sqrt{3}$,

2) $x-2=-\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x_2=2-\sqrt{3}$.

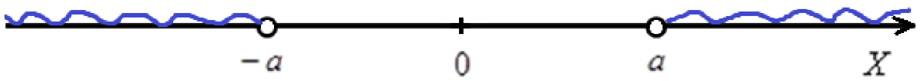
Мысленно подставьте полученные значения в исходное уравнение и убедитесь в том, что они действительно являются корнями.

На очереди **неравенства**. Давайте **прочитаем вслух и вдумаемся в смысл неравенства** $|x| < a$ – *«икс» по модулю меньше, чем* a. Это означает, что «икс» принимает значения из интервала $-a < x < a$:



Так, высказыванию *нормальная температура по модулю меньше пятидесяти:* $|t| < 50°$, очевидно, соответствует температурный диапазон $-50° < t < 50°$.

Теперь **вдумываемся в неравенство** $|x| > a$: *«икс» по модулю больше, чем* a. Это означает, что **или** $x < -a$, **или** $x > a$:



И высказывание *температура по модулю больше пятидесяти:* $|t| > 50$ – это и есть тот самый «кирдык», когда она либо $t < -50°$, либо $t > 50°$.

Аналогичные выкладки справедливы для *нестрогих* неравенств: неравенство $|x| \le a$ раскрывается через двойное неравенство $-a \le x \le a$, а неравенство $|x| \ge a$ раскрывается через ***совокупность*** неравенств …, то есть «икс» **или** *меньше либо равен* $-a$, **или** *больше либо равен* a. ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение.

Типовой пример встречается при измерении физических величин. Представьте, что вы измеряете линейкой некий объект. Очевидно, что при выполнении этого физического опыта будет допущена ***абсолютная погрешность*** Δx *(«дельта икс»)*, но тут есть варианты: вы либо чуть-чуть недомеряете, либо допустите небольшой перебор. Таким образом, погрешность может оказаться как положительной, так и отрицательной. И здесь будет разумным выдвинуть следующее требование: *абсолютная погрешность измерений* Δx *не должна превышать по модулю одного миллиметра*. Эта фраза означает, что $|\Delta x| \le 1$ или, что то же самое, погрешность должна находиться в пределах $-1 \le \Delta x \le 1$.

Справка: *абсолютная погрешность - это разность между опытным (измеренным) и истинным значением величины:* $\Delta x = x_{опыт.} - x_{ист.}$.

Другая распространённая задача: *нормативная масса пачки чая составляет 300 гр. Упаковка проходит контроль, если масса отличается от норматива на более чем на 2 гр.*

Подобную формулировку часто записывают с помощью модуля. Обозначим через x массу **произвольной** пачки чая. Очевидно, что разность $x - 300$ может оказаться как положительной, так и отрицательной, и *по модулю* это отклонение не должно превышать двух грамм: $|x - 300| \le 2$. Или:

$-2 \le x - 300 \le 2$, и теперь нам нужно разрешить это неравенство относительно x.

К каждой части двойного неравенства можно прибавить <u>одно и то же</u> число:

$-2 + 300 \le x - 300 + 300 \le 2 + 300$

$298 \le x \le 302$ – допустимые границы массы пачки чая.

Пользуюсь случаем, сформулирую ещё одно правило: **все три части двойного неравенства можно умножить на одно и то же число, и если это число отрицательно, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположную сторону**.

Так, для того чтобы решить неравенство $-4 < -2x \le 1$, нужно все его части умножить на $-\frac{1}{2}$, и поскольку это число отрицательное, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположном направлении:

$2 > x \ge -\frac{1}{2}$, после чего переписать результат «справа налево»:

$-\frac{1}{2} \le x < 2$ – в привычном порядке, или ещё можно записать: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Следует отметить, что правила преобразования двойных неравенств не являются какими-то самостоятельными правилами, они следует из действий с «обычным» неравенством. Но об этом позже.

А сейчас долгожданные задания для самостоятельного решения:

Задание 6

а) Решить уравнения (9 штук):

$$x - 2(1+2x) = 3 - \frac{1}{2}x, \quad \frac{x+(3x-2(1-x))}{4x+3} = \frac{2}{5}, \quad x^2 = 2(4x+3)+3x^2, \quad 2x^2+9x-5=0,$$

$$x^2-6x+9=0, \quad x^3+x^2=0, \quad (x-1)^3=8, \quad |5-3x|=1, \quad |x+1|=x+2$$

б) Решить неравенства (7 штук):

$$1-\frac{x}{3} < x+2, \quad x^2+4x+4>0, \quad x^3-2x \le 0, \quad \frac{x}{x^3+1} \ge 0, \quad \frac{x^2-1}{x^2+2x+5} < 0,$$

$\left|\sqrt{2}x+1\right| \le 1, \quad |1-2x| > \frac{1}{3}$, ответы записать с помощью промежутков $(x \in ...)$.

С помощью модуля:

в) дать определение правильной и неправильной дроби $\frac{m}{n}$.

г) записать фразу и пояснить её смысл: *деталь признаётся бракованной, если её длина отличается от 20 сантиметров больше, чем на полмиллиметра*.

д) записать фразу и пояснить её смысл: *максимально допустимая* ***относительная погрешность*** *прибора составляет* $\pm 0{,}2\%$.

Справка: *относительная погрешность («дельта малая»):* $\delta = \frac{x_{измер.} - x_{ист.}}{x_{ист.}} = \frac{\Delta x}{x_{ист.}}$ – *это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины. Если* δ *умножить на 100, то относительная погрешность будет выражена в процентах.*

Напоминаю, что эти задачи обязательны для выполнения – они являются неотъемлемой частью курса, поскольку в образцах решения я рассказываю дополнительные и очень важные вещи по теме.

2.8. Понятие системы

Не так давно нам встретилась фигурная скобка $\{$ и в математике, да и в жизни у неё особый смысл – это значок ***системы***.

Система – это множество условий, которые должны выполняться **вместе**. ***Решение системы*** (если оно существует) удовлетворяет ВСЕМ условиям системы.

Решим, например, *систему уравнений* $\begin{cases} x^2 = 4 \\ (x+2)(x-3) = 0 \end{cases}$. Это означает, что нам нужно найти ТАКИЕ значения «икс», которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы, или доказать, что их не существует. Очевидно, что $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ – корни 1-го уравнения, а $x_1 = -2,\ x_2 = 3$ – корни 2-го уравнения. **Но решением системы является лишь значение** $x = -2$ – поскольку оно удовлетворяет **и первому и второму** уравнению.

Если у системы нет решений, то её называют ***несовместной***. Так, несовместной является следующая *система неравенств*: $\begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$ – совершенно понятно, что «икс» не может быть меньше двух **и в то же самое время** больше трёх.

Система может состоять из разнородных условий: $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x > 0 \end{cases}$ – решением этой системы является значение $x = 2$ – только оно удовлетворяет **каждому** условию системы.

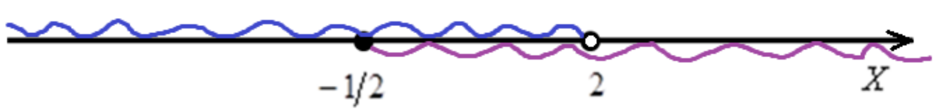
Более того в качестве условий могут выступать не только уравнения и неравенства:
$\begin{cases} n \in \mathbf{N} \\ n \ \textit{делится на}\ 3 \\ n < 15 \end{cases}$ – решением этой системы являются числа $\{3, 6, 9, 12\}$

Ну и, конечно, не забываем о системе физических упражнений, чтобы не «закостенеть» перед монитором ☺. Тридцать отжиманий, двадцать приседаний и пару километров трусцой. А если что-то не выполните, то, увы, это уже будет не система ☹.

Таким образом, с помощью системы можно решить разные задачи! Например, двойное неравенство $-4 < -2x \le 1$ предыдущего параграфа. По сути, здесь записано два неравенства: $-2x > -4$ и $-2x \le 1$, причём, они должны выполняться **одновременно**:

$\begin{cases} -2x > -4 \\ -2x \le 1 \end{cases}$ и, решая каждое неравенство, получаем: $\begin{cases} x < 2 \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Решение первого неравенства изобразим сверху, а второго – снизу:



Решением системы является **общий** промежуток: $x \in \left[-\dfrac{1}{2};\, 2\right)$, или, как говорят математики, ***пересечение*** решений: $(-\infty;\, 2) \cap \left[-\dfrac{1}{2};\, +\infty\right) = \left[-\dfrac{1}{2};\, 2\right)$ *($\cap$ - значок пересечения)*.

Сколько может быть условий в системе? Да сколько угодно.

Сколько может быть решений у системы? Ни одного, одно, несколько, много или бесконечно много ☺. И ***решить систему*** – это значит найти ВСЕ решения либо доказать, что их нет. Впрочем, иногда нужно найти хоть какое-то решение системы.

Возможно, у вас ещё возник вопрос: а где же те ужасные школьные уравнения и неравенства с корнями и всякими синусами? **Забудьте!** В высшей математике они практически не потребуются. Достаточно повторить лишь самые простые.

2.9. Уравнения и неравенства с несколькими переменными

До сих пор мы рассматривали только одну переменную – «икс». Но совершенно понятно, что уравнение или неравенство может содержать и несколько различных переменных. Например, две. Добавим вторую сакральную букву – «игрек»:

$$y - x = 3$$

Данное уравнение имеет *бесконечно много решений*, например: $x = 0,\ y = 3$ или $x = 2,\ y = 5$. Каждая пара значений обращает уравнение в *верное числовое равенство*, а значит, действительно является решением. Возникает вопрос: как отыскать ВСЕ решения? Очень просто. Оставим в левой части **только игрек**, для этого перенесём «икс» направо, сменив у него знак. Да, с уравнением *нескольких переменных* можно делать практически всё то же самое:

$$y = x + 3$$

И теперь хорошо видно, что «игрек» на три больше, чем «икс». Таким образом, мы получили **закон**, по которому каждому значению x ставится в соответствие строго определённое значение y. И, пользуясь этим законом, легко найти любую пару решений.

Как и младший брат, уравнение с двумя переменными может иметь единственное решение, например: $x^2 + y^2 = 0$ или не иметь действительных решений вовсе: $x^2 + y^2 = -1$

Популярная система, а-ля $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$, может иметь единственное решение, бесконечно много решений или же не иметь их совсем. Давайте вспомним этот школьный метод решения: из 1-го уравнения выразим «игрек» *(можно «икс»)*: $y = 5 - x$, и подставим во 2-е уравнение: $-2x + 5 - x = -1$. Приводим подобные слагаемые:

$-3x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ – подставим в 1-е уравнение: $y = 5 - x = 5 - 2 = 3$.

Таким образом, пара $x = 2,\ y = 3$ является единственным решением системы. Мысленно подставьте эти значения в **каждое** уравнение системы и убедитесь в том, что они «подходят» и там и там.

В курсе высшей математики мы изучим **эти системы** досконально, а также познакомимся **со смыслом и методом решения соответствующих неравенств**: $y - x \le 3$ и их систем: $\begin{cases} x - y > -5 \\ 2x + y < -7 \end{cases}$, в которых работают те же «фишки». Ну а пока есть дела понасущнее – возвращаемся к тому самому **закону**, который чудесным образом возник в ходе решения уравнения $y - x = 3$:

3. Функции и графики

Поехали:

3.1. Понятие функции

Функция одной независимой переменной – это **правило** f *(зависимость, закон)* по которому **каждому допустимому значению** x ставится в соответствие **одно и только одно** значение y. **Стандартная запись**: $y = f(x)$

Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***.

Переменная y называется ***зависимой переменной*** и, кроме того, под «игреком» также подразумевают *функцию*.

Таким образом, функцию можно записать так: $f(x) = x + 3$, либо так: $y(x) = x + 3$, либо так: $y = x + 3$, для краткости чаще будем использовать последний вариант. Данное правило увеличивает каждое значение «икс» на три. Например: $f(-1) = -1 + 3 = 2$.

Следующий закон удваивает каждое значение «икс»: $y = 2x$. А вот эта функция возводит «иксы» в квадрат: $y = x^2$. И так далее, различных функций – просто тьма.

Функцию также записывают в виде *уравнения* $F(x;\, y) = 0$ (стандартный вид). Возьмём ту же функцию $y = x + 3$ и перебросим все члены налево: $y - x - 3 = 0$.
В таких случаях говорят, что функция задана ***неявно*** или ***в неявном виде***. Потому что сразу не понятно, что делает эта функция :)

Множество допустимых значений «икс» называют ***областью определения*** функции – это те значения, для которых определены «игреки». Область определения **обозначают** следующим образом: $D(f)$ или $D(y)$.

Областью определения всех перечисленных выше функций является любое «икс», т.е. все действительные значения: $D(y) = \mathbf{R}$. Но этим может похвастаться далеко не каждая функция. Так, функция $y = \dfrac{1}{x}$ определена для всех «икс» кроме нуля:

$D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, вместо *значка исключения* (\ ) здесь также можно использовать *объединение* двух интервалов: $D(y) = (-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$

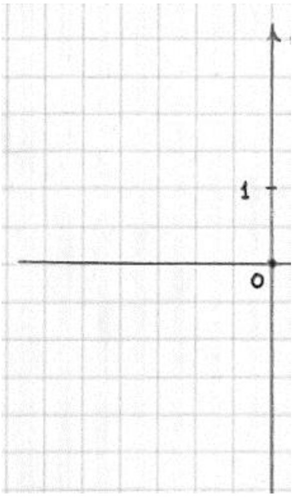
Функция $y = \sqrt{x}$ определена лишь для неотрицательных «икс»: $D(y) = [0;\, +\infty)$

И в заключение параграфа кратко об ***обратной функции***: $x = f^{-1}(y)$ – эта функция выполняет **противоположное** действие. Например, для $y = 2x$ обратной является: $x = \dfrac{y}{2}$. Так как переменные поменялись ролями (теперь «игрек» независимая переменная), то буквы часто меняют местами: $y = \dfrac{x}{2}$ и эту функцию также называют обратной для $y = 2x$.
Для $y = x^2$ определены две обратные функции: $x = \sqrt{y}$ (если $x \ge 0$) и $x = -\sqrt{y}$ при $x < 0$, переобозначим: $y = \sqrt{x},\ y = -\sqrt{x}$. И в тяжёлых случаях поступают проще.

3.2. График функции в декартовой системе координат

Это графическое изображение функциональной зависимости. График функции $y = f(x)$ обычно строят в ***прямоугольной (декартовой) системе координат***. И посему сначала нужно построить саму систему. Для этого выбираем ***начало координат*** O и чертим ***координатные оси***. Ось OX называется ***осью абсцисс***, а ось OX – ***осью ординат***. Угол между осями равен $90°$ (прямой угол), отсюда и название – *прямоугольная* система.

Итак, подписываем оси и задаём размерность по ним. При оформлении чертежа в тетради наиболее популярны следующие масштабы:

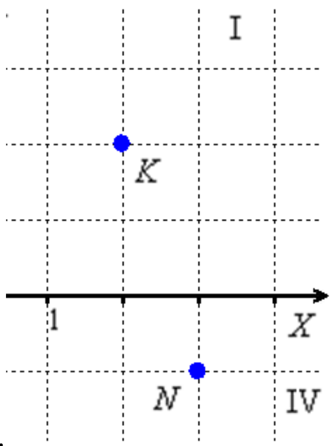


…

Для того чтобы задать масштаб, достаточно нарисовать ноль и две единицы. **НЕ НУЖНО «строчить из пулемёта»:** …~~-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5~~, … . Ибо ***координатная плоскость*** – не памятник Декарту, а студент – не голубь ☺.

По возможности старайтесь использовать масштаб: *1 единица = 2 клетки* (чертеж слева) Однако время от времени случается так, что чертеж не вмещается на тетрадный лист – и тогда масштаб уменьшаем: *1 единица = 1 клетка* (чертеж справа). Редко, но бывает, что масштаб чертежа приходится уменьшать (или увеличивать) ещё больше.

И на всякий пожарный повторим, как отмечать точки. **Любая точка плоскости однозначно определяется двумя координатами**, при этом 1-я координата – это **строго** «иксовая» координата (по *оси* OX), а 2-я координата – это **строго** «игрековая» координата (по *оси* OY). В качестве примере отмечу точки $K(2;2)$, $L(-1;3)$, $M(-4;-3/2)$, $N(3;-1)$:



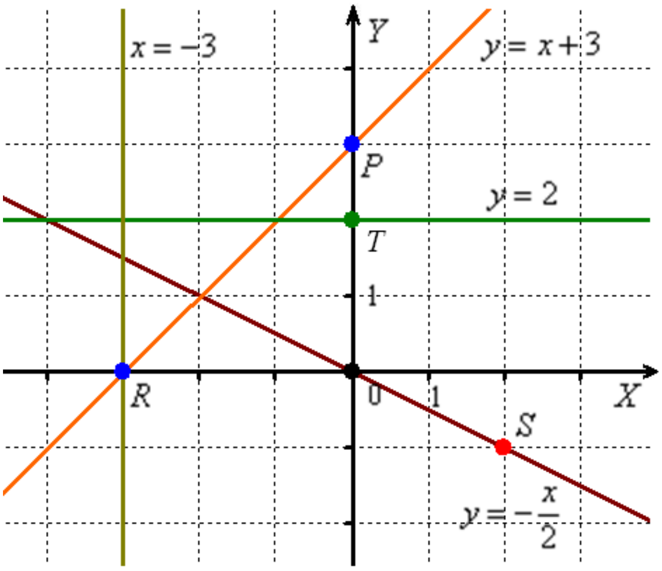
…

И да, *координатные оси* делят *координатную плоскость* на четыре ***координатных четверти***, их я занумеровал римскими числами (общепринятый порядок номеров).

На *координатной плоскости* можно построить много чего интересного, но сейчас нас интересуют графики функций. Чтобы построить график $y = f(x)$ обычно требуется найти несколько *(или чуть больше)* точек, координаты которых удовлетворяют данному закону, отметить эти точки на чертеже и аккуратно соединить линией. При этом **важно знать принципиальный вид графика той или иной функции**. Все функции можно разделить на несколько больших групп, и сейчас мы вспомним основные семейства:

3.3. Линейная функция

Имеет вид $y = kx + b$, где k и b – константы (числа). Графиком ***линейной функции*** является ***прямая***. Для её построения достаточно знать две точки. Так, для функции $y = x + 3$ удобно выбрать значение $x = 0$ и найти $y = 0 + 3 = 3$, и, например, для $x = -3$ вычислить $y = -3 + 3 = 0$. Отмечаем найденные точки $P(0;3)$, $R(-3;0)$ на чертеже и аккуратно, по линейке проводим прямую:



Прямая вида $y = kx$ проходит через начало координат и называется ***прямой пропорциональностью***. Для её построения нужно найти одну точку. Так, для прямой $y = -\frac{x}{2}$ удобно выбрать $x = 2 \Rightarrow y = -1$. Отмечаем на чертеже точку $S(2; -1)$ и порядок!

Коэффициент k называется ***угловым коэффициентом*** прямой. Если $k > 0$, то график идёт «снизу вверх», например, график $y = x + 3$. Если $k < 0$, то график идёт «сверху вниз», например, $y = -\frac{x}{2}$.

Чем больше k *по модулю*, тем круче идёт график, и наоборот, чем k *по модулю* меньше – тем график более пологий. Так, график $y = x + 3$ $(k_1 = 1)$ имеет более крутой наклон, нежели график …, ибо $|k_1| > |k_2|$.

Если $k = 0$, то получаем *функцию-константу*: $y = b$. Как её понять неформально? «Игрек» ВСЕГДА *(при любом «икс»)* равен одному и тому же числу. Данная прямая параллельна оси OX и проходит через точку $(0; b)$, так, прямая $y = 2$ проходит через точку $T(0; 2)$. **Функция** $y = 0$ **задаёт ось** OX – **запомните этот важный факт!**

И остались у нас прямые, параллельные оси OY. Увы, их нельзя задать с помощью функции $y = kx + b$, но зато можно с помощью ***общего уравнения прямой***: $Ax + By + C = 0$

Если $B = 0$, то получается уравнение вида $x = a$. Оно задаёт прямую, которая параллельна оси OY и проходит через точку $(a; 0)$. Так, прямая $x = -3$ проходит через точку $R(-3; 0)$. И, в частности, **уравнение** $x = 0$ **задаёт саму ось** OY.

Если же $B \neq 0$, то из *общего уравнения* $Ax + By + C = 0$ легко выразить функцию: …, которая описывает все остальные случаи.

3.4. СтепеннАя функция

На самом деле эту функцию мы начали разбирать в предыдущем параграфе, где «икс» находился в первой степени. Но степень может быть и больше, и меньше или вообще быть дробной. Рассмотрим наиболее распространенные случаи:

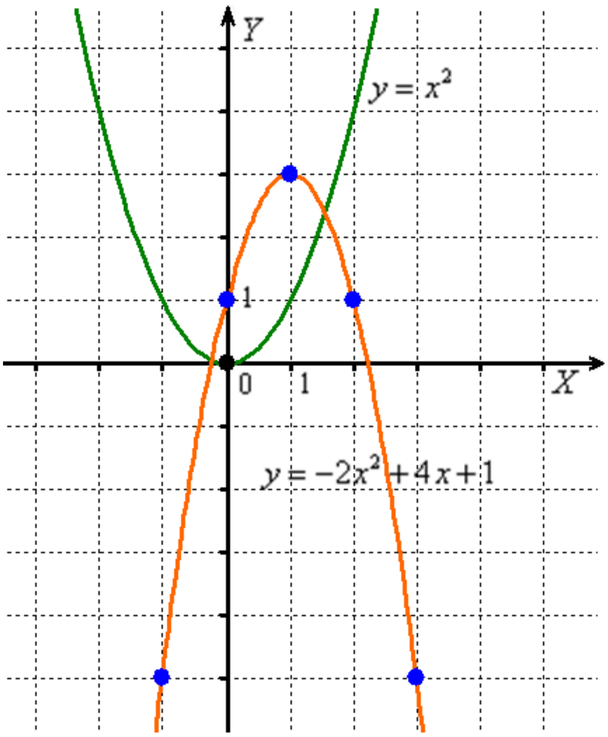
Функция вида … называется ***квадратичной функцией***, а её график – ***параболой***. Если $a > 0$, то ветви параболы «смотрят» вверх, если $a < 0$, то вниз.

Простейшая парабола вам хорошо известна: $y = x^2$ *(см. ниже)*. Обратите внимание, что график этой функции **симметричен относительно оси** OY. Такие функции называют ***чётными***. Аналитически чётность выражается условием $f(-x) = f(x)$. Проверим на чётность нашу функцию, для этого ВМЕСТО x подставим $-x$:

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $f(x) = x^2$ – *чётная*.

В общем случае *квадратичная функция* чётной не является, но симметрию самой параболы никто не отменял и этим удобно пользоваться на практике.

Как быстро построить любую параболу? Очевидно, сначала выгодно найти её вершину, а затем – несколько пар симметричных точек. Посмотрим, как это происходит на примере функции $y = -2x^2 + 4x + 1$:



Сначала находим вершину, для этого **берём производную** и приравниваем её к нулю: $y' = (-2x^2 + 4x + 1)' = -4x + 4 = 0$

Найдём корень уравнения: $x = 1$ – тут и находится вершина, её «игрек»:

$y = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$

Теперь найдём опорные точки (обычно хватает четырёх), при этом используем симметрию параболы и принцип «влево-вправо»:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -0 + 0 + 1 = 1$

$x = 2 \;\Rightarrow\; y = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$

Внимание! Для проверки рассчитываем и то, и то значение, они должны совпасть! Не ленимся!

$x = -1 \Rightarrow y = -2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -2 - 4 + 1 = -5$

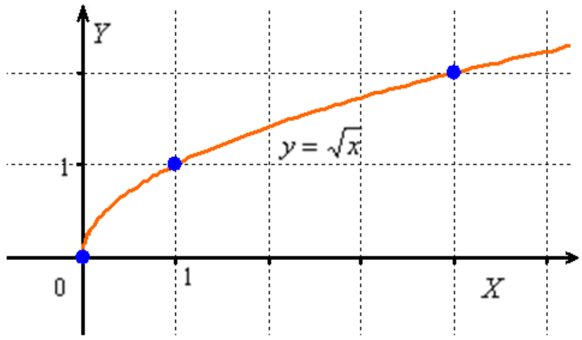
$x = 3 \;\Rightarrow\; y = -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = -18 + 12 + 1 = -5$

Перечисленные действия обычно выполняются устно или на черновике, а результаты заносятся в табличку:

x	1	0	2	-1	3
y	3	1	1	-5	-5

Осталось отметить найденные точки на чертеже и АККУРАТНО соединить их линией. Рассмотренный алгоритм не является обязательным и в простых случаях вершину параболы можно обнаружить методом «практического тыка», просто перебирая точки. Особенно, если у вас нелады с производными (их рассмотрим в курсе вышмата).

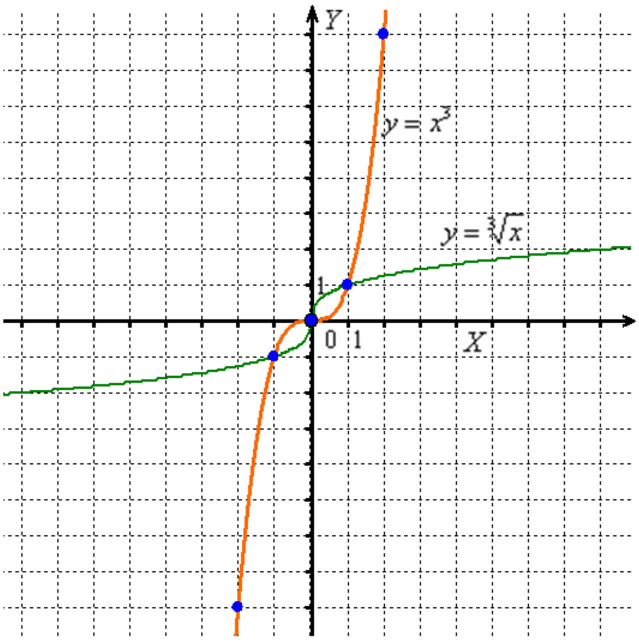
График функции $y = \sqrt{x}$ представляет собой ветвь параболы, которая «лежит на боку»:



Как уже отмечалось, эта функция определена лишь для неотрицательных «иксов»: $D(y) = [0; +\infty)$,
и для построения графика удобно использовать следующие опорные точки:

x	0	1	4
y	0	1	2

График функции $f(x) = x^3$ называется ***кубической параболой***. Данная функция **симметрична относительно начала координат**, и такие функции называют ***нечётными***. Аналитически нечётность выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Проверим нашу функцию на нечётность, для этого ВМЕСТО x подставим $-x$: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, ч.т.п.



Для построения кубической параболы достаточно отметить точки:

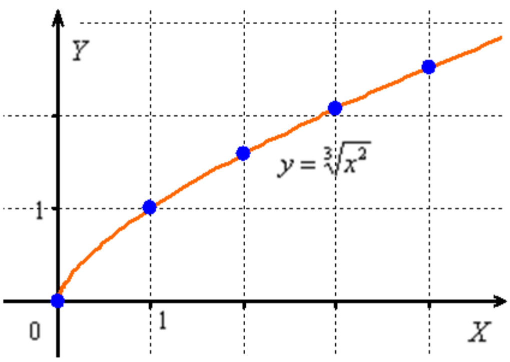
x	0	1	2
y	0	1	8

после чего воспользоваться симметрией или как раз *нечётностью* функции:
$f(-1) = -1, \quad f(-2) = -8$.

График функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ представляет собой кубическую параболу, «лежащую на боку». В отличие от $y = \sqrt{x}$, эта функция определена для всех «икс»: $D(f) = \mathbf{R}$ и тоже является нечётной, ибо «минус» преспокойно выносится вперёд:
…

График произвольного корня $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ *с дробным показателем* следует строить, имея в виду области определения того или иного корня. Так, функция $y = \sqrt[3]{x^2}$, как и $y = \sqrt{x}$, определена только для неотрицательных «икс»: $D(y) = [0; +\infty)$ и для построения её графика придётся найти несколько значений приближенно:

x	0	1	2	3	4
y	0	1	$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$	$\sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$	$\sqrt[3]{16} \approx 2{,}52$

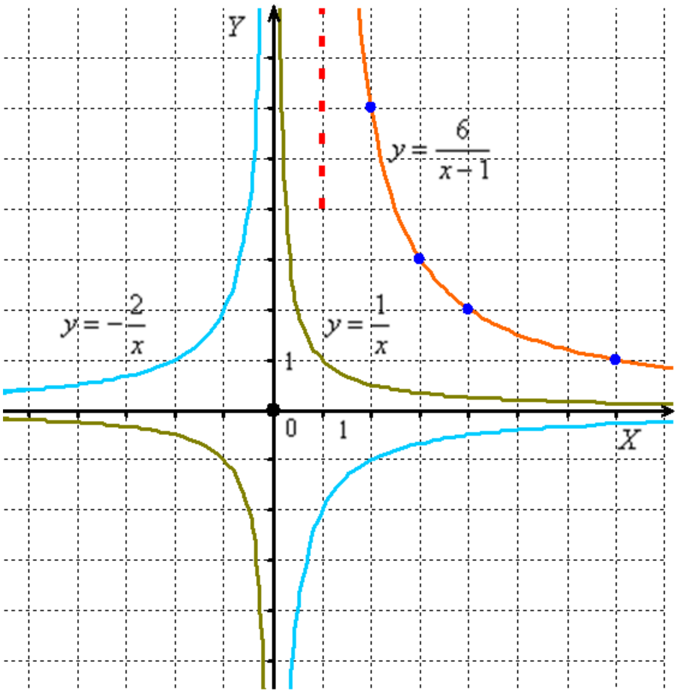


Такие значения на математическом жаргоне называют «плохими», но что поделать….

Данная функция не является чётной или нечётной, поскольку она не определена для отрицательных «икс», а значит, условие $f(-x) = f(x)$ либо $f(-x) = -f(x)$ просто не может выполняться.

График функции $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$ представляет собой ***гиперболу***. Да, это тоже степенная функция! Ибо $\frac{1}{x}=x^{-1}$. Если …, то ветви гиперболы лежат в 1-й и 3-й координатных четвертях, если…, то во 2-й и 4-й *(см. примеры на чертеже ниже)*.
Очевидно, что перед нами *нечётная* функция, поскольку: $f(-x)=\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}=-f(x)$.

Данная функция не определена в точке $x=0$, а координатные оси являются ***асимптотами*** графика – **«залезать на них» нельзя!** *Асимптота*, если «на пальцах» – это прямая, к которой график приближается *бесконечно близко*, но не пересекает её.



Как быстро построить график гиперболы? (да и не только её)

Во многих случаях удобно поточечное построение, построим, например, правую ветвь $y=\frac{6}{x-1}$.

Эта функция не определена в точке $x=1$, и поэтому *вертикальная асимптота* будет именно здесь.

Найдём несколько опорных точек (подбирая удобные значения «икс»):

x	2	3	4	7
y	6	3	2	1

Отмечаем эти точки на чертеже и аккуратно соединяем их линией

Принципиально такую же форму имеют графики $y=\frac{a}{\sqrt{x}}$, $y=\frac{a}{x^2}$, $y=\frac{a}{x^3}$ – только в первом случае гипербола будет иметь одну ветвь, во втором – две ветви, расположенные в 1-й и 2-й координатных четвертях, и третья гипербола будет похожа на $y=\frac{a}{x}$.

Ну и, конечно, **творческие задания**, которые нас заждались!

Задание 7

а) Решить графически систему уравнений $\begin{cases} x+y=5 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$. Догадайтесь сами ;)

б) Построить график $y=|x|$. Вспоминаем, как раскрывать модуль.

в) Проверить функции на чётность / нечётность и построить их графики:

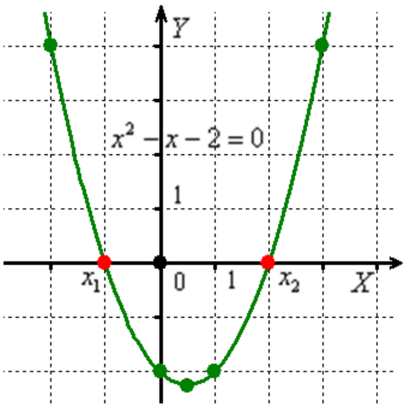
$f(x)=x^2-x+1$, $f(x)=-\frac{x^2}{2}-1$, $f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}$, $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$, пожалуй, достаточно.

г) Дано $x^2+y^2=r^2$ – уравнение окружности с центром в начале координат радиуса r. Выразить функции, определяющие верхнюю и нижнюю полуокружность, указать их области определения.

3.5. Графическое решение уравнений и неравенств

В предыдущей главе мы решали уравнения и неравенства *аналитически*, и сейчас вдохнём в эти задачи геометрический смысл. И это вас вдохновит! – это будет просто, это будет круто и это будет красиво! А, главное, чрезвычайно полезно.

Сначала частный случай. Чтобы решить уравнение вида $f(x)=0$, нужно построить график функции $y=f(x)$ и посмотреть, где он пересекает *ось абсцисс*. Там и находятся корни. Если точек пересечения нет, то уравнение не имеет действительных решений.



Так, при решении квадратного уравнения $x^2-x-2=0$ через дискриминант мы получили корни $x_1=-1,\ x_2=2$, но здесь можно просто построить параболу, и всё понятно без комментариев.

Решением неравенства $f(x)>0$ являются те промежутки, на которых график $f(x)$ **выше** оси OX, и, наоборот, $f(x)<0$ – там, где график $f(x)$ **ниже** оси.

Таким образом, вместо того, чтобы вымучивать неравенство $x^2-x-2>0$ методом интервалов, просто смотрим на график и ответ готов: ….

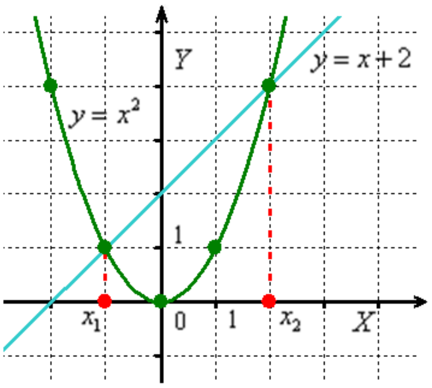
Соответственно, решением неравенства $x^2-x-2<0$ является интервал $x\in(-1;\ 2)$.

В случае *нестрогих неравенств* $x^2-x-2\geq 0,\ \ x^2-x-2\leq 0$ к решениям нужно добавить пограничные точки: $x\in(-\infty;\ -1]\cup[2;\ +\infty)$ и $x\in[-1;\ 2]$ соответственно.

А если вам не хочется возиться с нахождением опорных точек, «тыкая в них наугад» (ведь параболы бывают большие, размашистые), то есть:

общий случай. Чтобы решить уравнение $f(x)=g(x)$, нужно построить графики $y=f(x),\ \ y=g(x)$ и найти их точки пересечения. «Иксовые» координаты этих точек и будут решениями. Если графики не пересекаются, то действительных решений нет.

Таким образом, вместо решения уравнения $x^2-x-2=0$ с вычерчиванием параболы, представим его в виде $x^2=x+2$ и изобразим элементарные графики:



Подчёркиваю ещё раз, что решением являются «иксовые» координаты точек пересечения.

Решением неравенства … являются те промежутки, на которых график $f(x)$ **выше** графика $g(x)$, и, наоборот: … – там, где график $f(x)$ **ниже** графика $g(x)$. Так, решением неравенства $x^2>x+2$ являются промежутки $x\in(-\infty;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$ – поскольку на них парабола расположена **выше** прямой. И, наоборот, решением неравенства $x^2<x+2$ является промежуток $x\in(-1;\ 2)$, так как здесь парабола расположена **ниже** прямой. Аналогично для *нестрогих* неравенств.

Кстати, всем ли понятно, как из общих правил $f(x)=g(x),\ f(x)>g(x),\ f(x)<g(x)$ получаются частные правила для $f(x)=0,\ f(x)>0$ и $f(x)<0$? Элементарно. Это тот случай, когда $y=g(x)=0$, а эта функция задаёт ось OX.

Когда удобно использовать графический метод? Прежде всего, в простых случаях. Так, при решении неравенства $\frac{1}{x} > 0$ проще мысленно представить гиперболу, нежели использовать метод интервалов. Где гипербола **выше** оси OX ? На интервале $x \in (0; +\infty)$. Неравенству $\frac{1}{x} < 0$ соответствует левая ветвь, которая лежит **под** осью, на интервале $x \in (-\infty; 0)$. И ещё этот метод хорош для лучшего понимания математики.

Графический способ спасёт в экстремальных ситуациях, например, когда вы позабыли, как решать квадратное уравнение, а помощи ждать неоткуда. Используйте приём, описанный выше – вместо уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ рассмотрИте $x^2 = x + 2$ с двумя простыми графиками, не построить которые – эт нужно постараться :)

Иногда графика эффективна в уравнениях «разнородными» функциями. Так, для решения уравнения $x - \sin x = 0$ не существует стандартных аналитических методов, но это не беда. Мысленно представляем график $y = x$ и график синуса $y = \sin x$ *(о котором позже)*, после чего сразу понятно, что уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

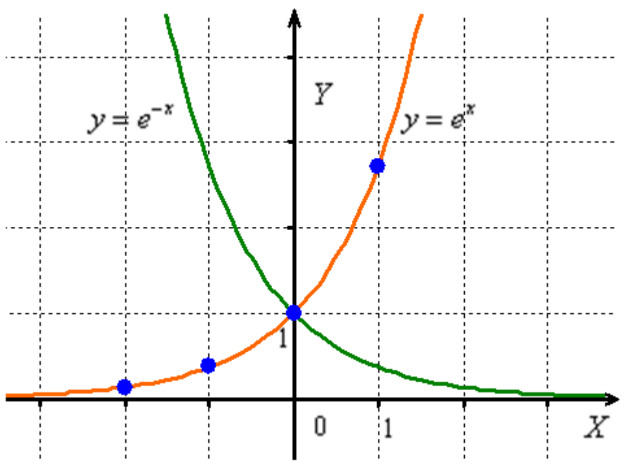
Кстати, в некоторых задачах нужно просто определить количество корней и / или их приблизительное расположение, и на этот вопрос зачастую легко ответит чертёж!

Разумеется, **графики должны быть простыми – это важнейшее условие применения графического метода**. Ибо строить $y = \frac{x^2(x+2)}{x-1}$ для решения $\frac{x^2(x+2)}{x-1} \le 0$ – затея как-то не очень :) Уж лучше метод интервалов.

И после этого невероятно полезного параграфа возвращается к нашим функциям:

3.6. Показательная функция

Данная функция имеет вид $y = a^x$, где $a > 0, a \ne 1$, при этом различают два случая – когда *основание* находится в пределах $0 < a < 1$ и когда $a > 1$. Начнём со второго случая и в качестве примера рассмотрим мегапопулярную ***экспоненциальную функцию*** $y = e^x$.



Напоминаю, что $e \approx 2{,}7 > 1$ и для построения графика удобно выбрать следующие опорные точки:

x	-2	-1	0	1
y	$e^{-2} \approx 0{,}14$	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$

Наверняка вы слышали выражение «экспоненциальный рост». Это синоним роста в геометрической прогрессии – он означает не просто быстрый, а «взрывной» рост. Уже при пяти получаем: $e^5 \approx 148{,}4$. Таким образом, при увеличении «икс» график *экспоненциальной функции* круто взмывает вверх, а при уменьшении – *бесконечно близко* приближается к своей *асимптоте* – оси OX. Данная функция определена для всех «икс»: $D(y) = \mathbf{R}$ и строго положительна: $y = e^x > 0$, то есть полностью лежит **над** *осью абсцисс*.

Принципиально так же выглядят графики других показательных функций $y = a^x$ с основанием **…**, например, **…**, **…**и др. Отличаться они будут крутизной.

График функции $y=e^{-x}$ симметричен графику $y=e^{x}$ относительно оси OY.

И принципиально так же выглядит график любой показательной функции $y=a^{x}$ с основанием $0<a<1$.

На всякий случай: $y=e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{x}$, *т.е. основание функции равно* $a=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$.

Выражение «экспоненциальное убывание» означает убывание со стремительным ускорением. И в самом деле, возьмём ту же пятёрку: $e^{-5}\approx 0{,}0067$ – почти уж у нуля.

Показательная функция не является чётной или нечётной (в обоих случаях), так как для неё не выполнено условие $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$.

И я Вас поздравляю с «экватором»!

Где-то половина школьной программы пройдена! Может даже чуть больше.
И теперь они самые:

3.7. Логарифмы и логарифмическая функция

Вам понравится:

➢ Понятие логарифма

Рассмотрим уравнение $2^{p}=8$, которое задаёт нам вопрос: *в какую степень нужно возвести 2, чтобы получить 8?* На этот вопрос отвечает ***логарифм*** $\log_{2}8$, который равен трём: $p=\log_{2}8=3$. …замысловато? Ну не зря же это проходят в старших классах ☺.

$e^{p}=1$ – *в какую степень нужно возвести «е», чтобы получить 1?* $p=\log_{e}1=0$

$10^{p}=\frac{1}{100}$ – *в какую степень нужно возвести 10, чтобы получить 1/100?*

$\log_{10}\frac{1}{100}=-2$

И вообще, $a^{p}=b$ – *в какую степень нужно возвести «а», чтобы получить «бэ»?*

Логарифмом числа b по ***основанию*** a $(a>0, a\neq 1)$:

$\log_{a}b$ – называется **степень «пэ»** $\log_{a}b=p$, в которую нужно возвести «а», чтобы получить «бэ».

Из чего следует ***основное логарифмическое тождество***: $a^{\log_{a}b}=b$.

…*тождество* – это такое железобетонное равенство ☺.

Сама запись $\log_{a}b$ **читается** как « *логарифм «бэ» по основанию «а»* », и очевидно, что логарифм определён лишь для положительных «бэ»: $b>0$ – по той причине, что любое положительное «а» в **любой** действительной степени «пэ»: $a^{p}=b$ – положительно.

Логарифм по основанию 10 называют ***десятичным логарифмом***, и для краткости **обозначают** значком $\lg$, например: $\log_{10}100=\lg 100$.

Логарифм по основанию «е» называют ***натуральным логарифмом*** и **обозначают** значком $\ln$, например: $\log_{e}1=\ln 1$. В высшей математике в ходу именно натуральные логарифмы, и в дальнейшем мы уделим им самое пристальное внимание.

➢ Свойства логарифмов

Как и в случае со степенями / корнями, я не буду разбирать все свойства, а остановлюсь лишь на тех, которые имеют большое значение для практики.

Переход к новому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, причём новое основание «цэ» вы можете выбрать по своему желанию *(из доступных вариантов: $c > 0, c \neq 1$)*, например: $\log_3 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$. Но гораздо чаще встречается частный случай формулы: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, например: $\log_3 5 = \dfrac{1}{\log_5 3}$. Разумеется, формула работает и в обратном направлении, что бывает удобным, когда нужно избавиться от знаменателя: $\dfrac{1}{\lg e} = \ln 10$.

Если $b_1 > 0, b_2 > 0$ то справедливо следующее *(и слева направо и справа налево)*:

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 = \ldots$$

$$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \frac{\ldots}{\ldots}$$

Например: $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3 \cdot 5) = \log_2 15, \quad \ln 8 - \ln 2 = \ln \dfrac{8}{2} = \ln 4$.

Обращаю внимание, что **эти действия выполнимы только для логарифмов с <u>одинаковыми</u> основаниями**, **не путайте** с «похожими» ситуациями: $\log_2 7 + \log_3 7$, $\ln 5 \cdot \ln 7$ или $\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$. Однако в последнем случае можно сделать так: $\dfrac{\lg 2}{\lg 3} = \log_3 2$.

Далее. **Для $b > 0$ и любого действительного числа k :**

$\log_a b^k = k \log_a b$ *! **Не путайте** с $\log_a^k b$ (логарифмом в степени).*

Например: $\ln 2^{50} = 50 \ln 2$ – и это просто волшебство! Ведь это здОрово избавиться от 50-й степени! Популярно и обратное действие, особенно, когда нужно выполнить другие упрощения: $3\lg 2 + \lg 5 = \lg 2^3 + \lg 5 = \lg 8 + \lg 5 = \lg(8 \cdot 5) = \lg 40$

Перечисленные правила можно распространить на отрицательные значения «бэ», но тогда нужно добавить модули:

$$\log_a |b_1| + \log_a |b_2| = \ldots$$

$$\log_a |b_1| - \log_a |b_2| = \log_a \left| \frac{\ldots}{\ldots} \right|$$

$\log_a b^k = k \log_a |b|$, если k *чётное*. Например: $\ln x^2 = 2\ln|x|$ – и равносильность соблюдена, поскольку полученный логарифм тоже определён для отрицательных «икс».

А вот такое преобразование **неравносильно**: $2\ln x = \ln x^2$, и поэтому здесь следует обязательно указать, что $x > 0$.

В случае иных значений k модуль не нужен: $\ln x^3 = 3\ln x, \quad \ln \sqrt[3]{x^2} = \ln x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \ln x$ – по той причине, что и исходные и полученные логарифмы определены только для положительных значений «икс».

➢ Логарифмирование и потенцирование

Логарифмирование – это перевод чисел или уравнений в *логарифмический масштаб* или, попросту говоря, «навешивание» логарифмов.

Данное действие удобно использовать при работе с астрономическими или микроскопическими числами, особенно, если они находятся в произведении. Так, число $2^{25}\cdot 10^{-100}$ целесообразно уменьшить, «навесив» на него логарифм, выгодно взять *десятичный* логарифм: $\lg(2^{25}\cdot 10^{-100})=\lg 2^{25}+\lg 10^{-100}=25\lg 2-100\lg 10=25\lg 2-100$ – далее переводим другие числа в тот же масштаб (логарифмируем по основанию десять) и работаем (выполняем действия) с гораздо более маленькими значениями.

Логарифмирование незаменимо при решении некоторых уравнений, например:

$5^x=80$

Для разрешения этого уравнения относительно «икс» «навесим» на обе его части логарифмы, обычно используют натуральные логарифмы:

$\ln 5^x=\ln 80$

в левой части «сносим» степень, и порядок:

…

и «любительская» проверочка: $5^{2,72}\approx 79,65$, около 80, что и требовалось проверить.

При логарифмировании нужно следить за знаками, так, обе части уравнения (функции) $y=x^2+1$ определены и положительны при любом значении «икс», поэтому здесь можно смело логарифмировать: $\ln y=\ln(x^2+1)$, получая *равносильное* уравнение. А вот у функции $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ обе части могут быть меньше нуля, и поэтому здесь нужно добавить модули: $\ln|y|=\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}\right|$, квадратному корню модуль не нужен: $\ln|y|=\ln\dfrac{\sqrt{x+3}}{|x|}$.
Однако это действие всё равно *неравносильно* т.к. мы потеряли значение $x=-3$ *(почему?)*. Но это не помеха для решения некоторых задач, например, для нахождения производной, где можно пренебречь даже модулями. Да, а зачем логарифмировать? Чтобы упростить правую часть: ….

Потенцирование – это обратная операция, «избавление» от логарифмов.

Предположим юные физики вдоволь нарезвились с вычислениями в *десятичном логарифмическом масштабе*, и хотят перевести результат $3\lg 2+12$ обратно. Без проблем:

$10^{3\lg 2+12}$, используем свойства степеней, логарифмов и основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2+12}=10^{\lg 2^3}\cdot 10^{12}=10^{\lg 8}\cdot 10^{12}=8\cdot 10^{12}$.

Потенцирование используют для того, чтобы выразить функцию *в явном виде,* например: $\ln|y|=\ln 5+3\ln|x|$ – «упаковываем» логарифмы в правой части:

$\ln|y|=\ln 5+\ln|x|^3$

$\ln|y|=\ln 5|x|^3$, после чего просто убираем логарифмы и модули заодно:

$y=5x^3$

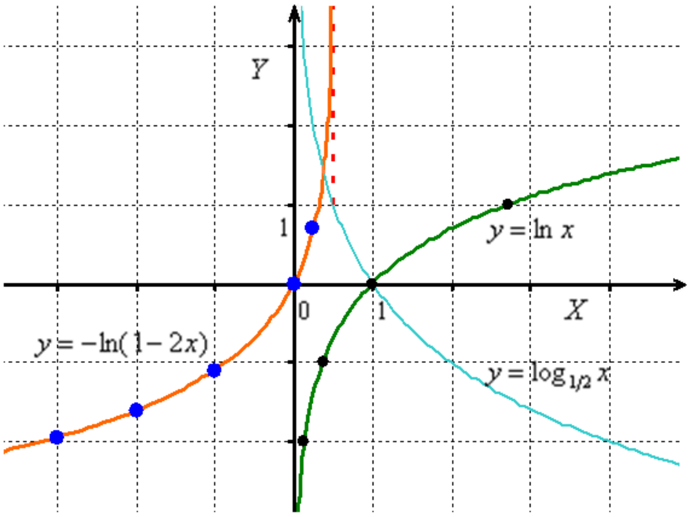
Такие действия выполняют при решении некоторых дифференциальных уравнений

➢ Логарифмическая функция и её график

В логарифмической функции фиксируется основание «а», а значение «бэ» является *независимой переменной*:

$y = \log_a x$ – данная функция каждому положительному значению «икс» ставит в соответствие **степень «игрек»**, такую, что: ….

Таким образом, логарифмическая и показательная функция – это две взаимно обратные функции, и график логарифма тоже представляет собой показательную кривую, только расположена она по-другому. Так, график *натурального логарифма* $y = \ln x$ имеет следующий вид (**запомните его!**):



Удобные опорные точки:

x	e^{-2}	e^{-1}	1	e
y	-2	-1	0	1

Принципиально так же выглядит график любого логарифма $y = \log_a x$ с основанием $a > 1$, в частности, *десятичный логарифм* $y = \lg x$ $(a = 10)$

Если $0 < a < 1$, то графики оказываются «развёрнутыми наоборот» относительно оси OX, например, $y = \log_{1/2} x$. Но такие логарифмы в высшей математике встречаются довольно редко.

Однако и в том и в другом случае логарифмическая функция $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$, а ось OY является *вертикальной асимптотой* графика.

Если «начинка» логарифма более сложная, то, естественно, график будет видоизменяться и мигрировать вместе с асимптотой. Построим, например, график функции $y = -\ln(1-2x)$. Это удобно сделать по следующей схеме: сначала из уравнения $1-2x = 0$ находим *вертикальную асимптоту* $x = 1/2$ *(оранжевый пунктир на чертеже)*. Теперь нужно выяснить область определения функции. Логарифм определён только в том случае, если его «начинка» **строго больше** нуля: $1-2x > 0$, и преобразуя это простое неравенство, получаем, что: $x < \frac{1}{2}$. Найдём затем несколько опорных точек:

x	-3	-2	-1	0	0,25
y	$-\ln 7 \approx -1{,}95$	$-\ln 5 \approx -1{,}61$	$-\ln 3 \approx -1{,}10$	0	$y = -\ln 0{,}5 \approx 0{,}69$

и аккуратно соединим их линией. Для вычисления «игреков» удобно использовать калькулятор, например, ***Калькулятор***, приложенный к этой книге.

Ещё пример *(на чертеже отсутствует)*: $y = \ln(x^2)$ – график этого логарифма имеет две симметричные относительно оси OY ветви (т.к. функция *чётная*), и эта функция не определена лишь в точке $x = 0$. А вот этот логарифм: $y = \ln(x^2+1)$ – определён всюду, поскольку $x^2+1 > 0$ при любом значении «икс».

Только что рассмотренные функции называют ***сложными*** или ***композиционными*** – это функции, в которые «вложены» другие функции: $y = f(g(x))$. В наших трёх примерах под логарифмом оказались линейная и квадратичные функции.

➢ Уравнения и неравенства с логарифмами

В параграфе о логарифмировании и потенцировании мы искусственно «навешивали» логарифмы на обе части уравнения либо избавлялись от них. А сейчас речь пойдёт об уравнениях и неравенствах, где логарифм присутствует **изначально**.

Начнем с простых случаев… и закончим ими:)

Уравнение вида $\log_a h(x) = p$ (p – константа) очевидным образом приводится к уравнению $h(x) = a^p$. Например:

$$\log_3 x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^2 = 9$$

$$\lg x^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{10}, \; x_2 = \frac{1}{10}$$

ну и давайте что-нибудь посодержательнее:

$$\ln(2x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = e^0 \quad \Rightarrow \quad 2x-1=1 \quad \Rightarrow \quad 2x=2 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y = \ln(2x-1)$ пересекает график $y=0$ (ось OX) в точке $x=1$.

И, конечно, **проверка** – подставим $x=1$ в левую часть исходного уравнения:
$\ln(2\cdot 1-1) = \ln 1 = 0$ – в результате получена правая часть, ОК.

Уравнение вида $\log_a h(x) = \log_a e(x)$ тоже разрешимо из естественных соображений: логарифмы <u>с одинаковыми основаниями</u> равны, если $h(x) = e(x)$, при этом корни должны быть ТАКИМИ, чтобы для них выполнялись условия $h(x) > 0, e(x) > 0$. Так, для решения уравнения $\log_3(x+1) = \log_3(3x-1)$ потенцируем обе части:

$x+1 = 3x-1$, откуда получаем корень $x=1$, после чего **обязательно** подставляем его в исходное уравнение: $\log_3(1+1) = \log_3(3\cdot 1-1) \quad \Rightarrow \quad \log_3 2 = \log_3 2$ – верное равенство.

А теперь рассмотрим такое уравнение: $\lg(x^2-1) = \lg(x-1)$, где после избавления от логарифмов всё вроде бы хорошо: $x^2-1 = x-1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 1$, однако **корнями эти значения не являются**, т.к. не входят в область определения логарифмов.

Неравенства. Простейшие из них удобно решать графически, причём мысленно. Рассмотрим неравенство $\ln x > 0$. Оно предлагает нам определить участок оси OX, где график натурального логарифма **выше** этой оси. …Вспомнили, взглянули? $x \in (1; +\infty)$. Аналогично, неравенству $\ln x < 0$ соответствует интервал $x \in (0; 1)$, где график логарифма **ниже** оси абсцисс. В случае *нестрогих* неравенств к решениям следует добавить единицу.

И рассмотрим **общий случай** $\log_a h(x) > p$, где «пэ» – произвольная константа. Во-первых, «начинка» логарифма должны быть **строго больше** нуля: $h(x) > 0$. **Это незыблемое условие**, о котором **ни в коем случае** забывать нельзя! Теперь разбираемся с основным неравенством: сначала в правой части искусственно добавляем множитель: $\log_a h(x) > p\log_a a$. Обратите внимание, что $\log_a a = 1$ и статус-кво соблюдён. В правой части поднимаем «пэ» в показатель: $\log_a h(x) > \log_a a^p$ и дальше следует развилка:

если $0 < a < 1$, то решаем систему $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}$, если $a > 1$ – то систему: ….

Как видите, **в 1-м случае после** потенцирования **знак неравенства следует сменить на противоположный**.

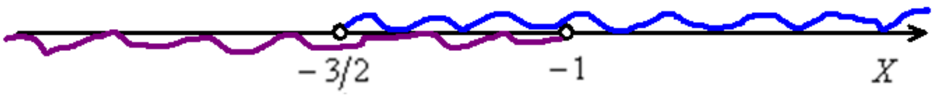
Неравенство $\log_a h(x) < p$ решается аналогично с финальными системами:

$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}$, если $0 < a < 1$ и … *(без смены знака неравенства)*, если $a > 1$.

Если изначальные неравенства *нестрогие*, то нижние неравенства в системах тоже будут *нестрогими*. **И ещё раз – условие $h(x) > 0$ незыблемо при любых раскладах**!

Как я уже отмечал, на практике почти всегда встречает второй случай, когда $a > 1$, ему и уделим внимание. Дорешаем неравенство $\ln(2x+3) < 0$, которое мы начали в параграфе Метод интервалов. Там была найдена область определения логарифма $h(x) > 0$:

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$ и сейчас нужно решить вторую часть задания. Согласно формальному алгоритму, домножаем правую часть неравенства: $\ln(2x+3) < 0 \cdot \ln e$, поднимаем ноль наверх: $\ln(2x+3) < \ln e^0$ и получаем: $\ln(2x+3) < \ln 1$. Так как основание логарифма $a > 1$, то при потенцировании знак неравенства менять не нужно: $2x + 3 < 1$. Преобразуя это простенькое неравенство, получаем: $x < -1$. Таким образом, имеем систему $\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < -1 \end{cases}$. Решение 1-го неравенства я отмечу сверху, а 2-го – снизу:



Решением системы и исходного неравенства $\ln(2x+3) < 0$ является *пересечение* (общая часть) промежутков: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ – да, вот такой вот совсем небольшой интервал.

Как вариант, неравенство $\ln(2x+3) < 0$ нетрудно решать графически – с графиком этого логарифма никаких проблем. И я предлагаю вам это задание в числе других для самостоятельного выполнения. Если что-то не запомнилось или не уложилось в голове, вернитесь к предыдущим параграфам:

Задание 8

а) Решить графически: $2^{x+1} - 3x - 2 = 0$, $\sqrt[3]{x} - x > 0$, $e^x - \ln x - 1 \le 0$, $\ln(2x+3) < 0$

б) Определить количество действительных корней уравнения $x^3 + 2x - 2 = 0$

в) Почему уравнение $2x^2 - 4x = 0$ мы можем сократить на два, но на два **нельзя** сокращать правую часть $y = 2x^2 - 4x$? Пояснить аналитически и геометрически

г) Вычислить или упростить: $\log_{1/2} 2$, $\log_3 81$, $\log_5(-3)$, $3\lg 10$, $\ln e^2$, $e^{2\ln 5}$,

$2\log_2 3 + 3\log_2 2$, $\frac{2}{\lg 5} - \log_5 4$, пожалуй, хватит, а то уже извращение какое-то пошло :)

д) Решить аналитически: $2^x = 4^x$, $\lg 3x = -1$, $\ln(x^2+3) = 1$, $\log_2(1-2x) \ge 3$, $\ln(x^2 + 2x + 2) < 0$ и для особых любителей пример посложнее: $\ln\frac{1-x}{x-3} > 0$.

Желаю успехов! И до очень скорой встречи.

4. Чуть-чуть геометрии

Что и говорить, «любимый» многими школьный предмет…. Но сейчас вас ждёт просто сказка! ~~Эротическая~~ Добрая, конечно ☺. **Всё, что нам нужно от школьной геометрии** – это повторить основные геометрические фигуры, их основные свойства, одну теорему (единственную в книге), синусы, косинусы и иже с ними, после чего наш разговор плавно перетечёт в завершающий раздел – тригонометрию.

Но начнём мы с орудий труда. Для решения геометрических задач (да и вообще математических) нам потребуются:

– ручка (лучше гелевая);

– простой карандаш (лучше средней жирности), можно несколько, даже цветные;

– линейка;

– тетради в клетку;

и другие желательные инструменты:

– циркуль – для построения окружностей;

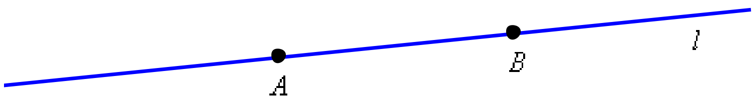
– транспортир – для измерения углов.

Резинкой ещё можно запастись, но с ней как-то не очень, портит чертежи…. Как вариант, есть бритва или белый «штрих» для замазывания огрехов. Но лучше всего подготовить прямые руки и светлую голову. Вроде всё… если что-то забыл, добавлю.

4.1. Элементарные геометрические фигуры

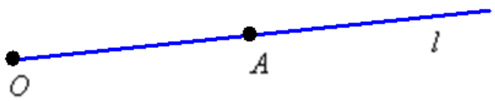
Точка. Она не имеет длины, ширины, площади, объёма или другой размерности (хотя на чертеже, конечно, занимает некоторое место). В геометрии под точкой понимают уникальное местоположение в пространстве. Это одно из базовых понятий математики.

Прямая. Она бесконечна:



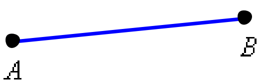
Прямую **обозначают** маленькими латинскими буквами $...k, l, m, n, ...$ или любыми двумя точками, которые ей принадлежат, например, прямая AB. Слово «прямая» **обязательно**, поскольку этими буквами можно обозначить много чего :)

Луч – это множество точек прямой, которые лежат **по одну сторону** от некоторой фиксированной точки O этой прямой:



Точка O называется ***началом*** луча. Луч тоже **обозначают** маленькими латинскими буквами, например, луч l или двумя точками – началом и ещё одной, например, луч OA.

Отрезок. В представлении не нуждается:



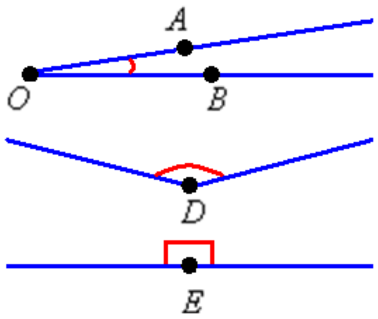
Точки A, B называются ***концами*** отрезка, и **обозначается** он естественным образом: отрезок AB.

Есть ещё ***векторы***, но они нас подождут в курсе **аналитической геометрии**.

Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя *лучами*, исходящими из одной точки. Точка O называется ***вершиной*** угла, а лучи – ***сторонами*** угла.

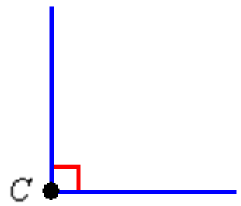
Угол обозначается значком $\angle$ и вершиной: $\angle O$, либо тремя точками: $\angle BOA$ (см. рис. ниже), либо маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varphi$ и др.

Угол измеряется в ***градусах*** и ***радианах***. Что такое *градусы*, всем понятно, а вот что такое *радианы* мы повторим позже.



Угол от 0 до 90° называют ***острым*** (например, $\angle O$), угол равный 90° – ***прямым*** ($\angle C$), угол от 90 до 180° – ***тупым*** ($\angle D$).

Угол в 180° называется ***развёрнутым*** ($\angle E$), а угол, равный 360° – ***полным*** (так как совершается полный оборот).

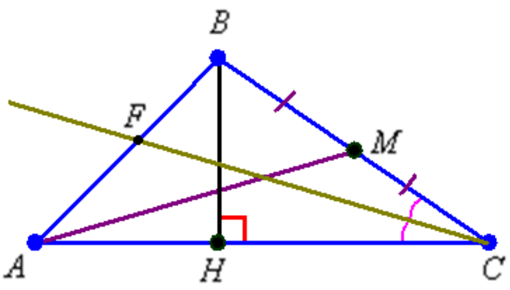


На чертежах углы помечают дугами (*красный цвет)*, в случае прямого или кратного ему угла дуга тоже прямоугольная.

Не нужно что-то специально запоминать!
– просто ВДУМЧИВО и не спеша, читайте этот конспект!

4.2. Треугольники

Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, соединяющих эти точки. Треугольник стандартно **обозначают** значком Δ и тремя вершинами: ΔABC. Сумма углов любого треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ или π *радиан*. Повторим его основные элементы:



Высота – это *перпендикуляр*, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (или её продолжение). Например, BH. У треугольника 3 высоты, и они пересекаются в одной точке.

Медиана – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например, AM – она делит сторону BC на 2 равные части: $|BM| = |MC|$

Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Справка: *отрезки равной длины обозначают одинаковыми засечками, а равные углы – одинаковыми дугами. Длину отрезка обозначают знаком модуля.*

Биссектриса – это луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла. Например, CF – она делит $\angle C$ на два равных угла $(\angle BCF = \angle FCA)$. Биссектрисы тоже пересекаются в одной точке.

В общем случае точки пересечения высот, медиан и биссектрис не совпадают.

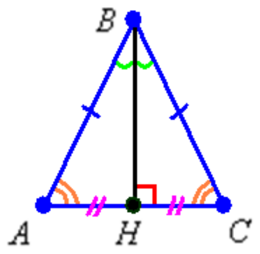
И, наверное, вам не нужно объяснять понятие ***площади*** *(вспоминаем, квадратные метры, дачные «сотки» и т.д.)*. **Площадь треугольника** равна половине произведения длины стороны *(любой)* на длину опущенной к ней высоты, в частности: $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BH|$.

Существуют и другие формулы.

Повторим частные случаи треугольников и их основные свойства:

➢ Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого две стороны равны, называется ***равнобедренным***.

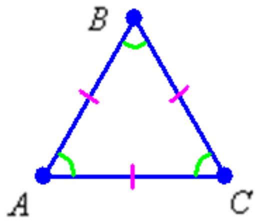


Равные стороны (AB и BC) называют ***боковыми сторонами***, а третью сторону (AC) – ***основанием***.

Высота, проведённая к *основанию* (BH), одновременно является медианой …и биссектрисой. … Углы при основании равнобедренного треугольника равны

➢ Равносторонний треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется ***равносторонним***.

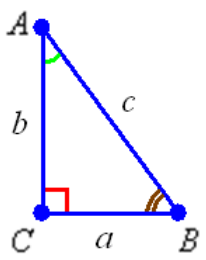


Все углы этого треугольника тоже равны и каждый из них равен 60° ($\frac{\pi}{3}$ радиан).

Равносторонний треугольник также называют ***правильным*** треугольником.

➢ Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

Треугольник с прямым углом называется ***прямоугольным***.



Нетрудно догадаться, что два других угла – острые.

Сторона, лежащая напротив прямого угла, является самой длинной и называется ***гипотенузой*** (AB), две другие стороны называются ***катетами*** (AC и BC). Обозначим **длины** этих сторон буквами $|BC| = a,\ |AC| = b,\ |AB| = c$. И теперь знаменитая теорема, известная уже более 2500 лет и доказанная более, чем 400 способами:

Теорема Пифагора: сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы: ….

Так, если известны *катеты* $a = 3, b = 4$ *ед.*, то с помощью теоремы легко найти *гипотенузу*: $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$ и, извлекая квадратный корень, получаем:

$$c = \sqrt{25} = 5 \text{ ед.}$$

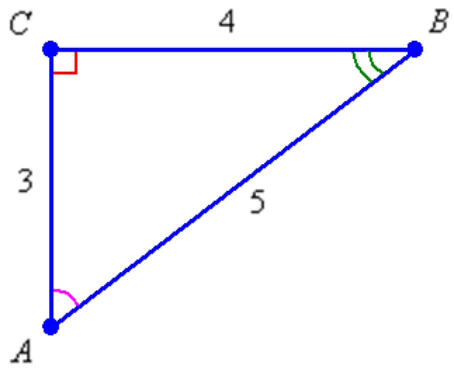
Справка: *если в метрических (вычислительных) задачах не задана размерность (сантиметры, метры, литры, бараны и т.д.), то хорошим тоном считается указывать единицы, сокращённо: ед.*

И наоборот, если известна гипотенуза $c = 20$ *ед.* и один из катетов, например, $b = 12$ *ед.*, то из формулы $a^2 + b^2 = c^2$ легко выразить и найти другой катет:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \ldots$ *ед.*, да, и не забываем о проверках:
$a^2 + b^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{400} = 20$ *ед.*, ч.т.п.

➢ Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

Говоря простым языком, это ***пропорции*** *(соотношения)* между сторонами прямоугольного треугольника, зависящие от его **острых** углов. Нагляднее сразу рассмотреть конкретный треугольник, например, *египетский* – со сторонами 3, 4 и 5 ед.:



Далее для простоты изложения под стороной я буду подразумевать её длину.

Синусом *острого* угла называется отношение *противолежащего* катета к гипотенузе:

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

Косинусом *острого* угла называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = ...$$

Тангенсом *острого* угла называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему:* $\mathrm{tg}\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \mathrm{tg}\angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

И ***котангенсом*** называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему*:

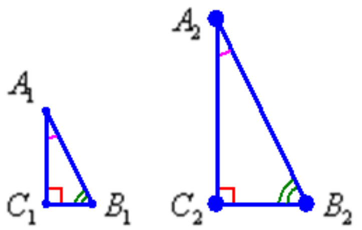
$\mathrm{ctg}\angle A = \frac{AC}{BC} = ...$ (предыдущие отношения наоборот).

А теперь мякотка: синус, косинус тангенс и котангенс не зависят от размеров треугольника. Они зависят только от значения острого угла. Так, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ – **вне зависимости от того, какой треугольник нам дан** – микроскопический или гигантский. Если в прямоугольном треугольнике есть угол $30°$, то *катет*, лежащий напротив этого угла, будет в два раза меньше *гипотенузы*. Каких бы размеров ни был треугольник.

Значения синусов, косинусов, тангенсов / котангенсов находят с помощью специальной таблицы *(см. Приложение **Тригонометрические таблицы**)* либо с помощью калькулятора. Следует отметить, что в тригонометрии перечисленные отношения определяются функциями – для произвольного угла, не только острого.

➢ Подобные треугольники

К этому понятию мы только что подошли. Треугольники являются ***подобными***, если их соответствующие углы (а значит, и их тригонометрические отношения) **равны**:



$$\angle A_1 = \angle A_2, \ \angle B_1 = \angle B_2, \ \angle C_1 = \angle C_2$$

Соответствующие стороны подобных треугольников **пропорциональны**: $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = ...$. Коэффициент $k > 0$ называют ***коэффициентом подобия***, в данном примере $k = 1/2$. Пропорцию можно составить и наоборот, тогда $k = 2$.

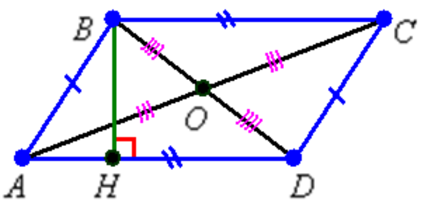
Разумеется, **подобными могут быть не только прямоугольные, и не только треугольники, а вообще произвольные геометрические фигуры**. Например, матрёшки с одинаковой росписью. Если мы возьмём самую маленькую матрёшку, то её пропорции будут точно такими же, как и у всех остальных матрёшек, как и у самой большой.

4.3. Четырехугольники

Логичное продолжение темы :). И теперь настало время размяться вам: возьмите в руки карандаш и отметьте на листке 4 точки, при этом **никакие три из них не должны лежать на одной прямой**. Соедините соседние точки отрезками. Четырёхугольник построен! У каждого свой. Психологи бы тут ещё о вашем характере что-нють сказали ☺

Но у нас суровая математика, которая категорически перемалывает психологию, и сейчас мы с увлечением повторим частные случаи четырёхугольников:

Параллелограмм – это четырёхугольник с попарно *параллельными* сторонами:



$AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, и, кроме того, эти стороны равны: $AB = DC,\ BC = AD$.

Углы при противоположных вершинах параллелограмма равны: $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.

Диагонали *параллелограмма* своей точкой пересечения делятся пополам: $AO = OC,\ BO = OD$.

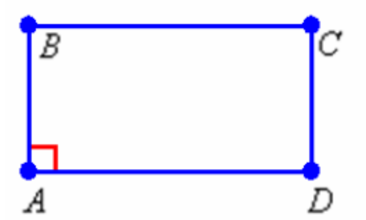
Площадь *параллелограмма* равна произведению длины стороны (любой) на длину, опущенной к ней высоты, например: $S = |AD| \cdot |BH|$.

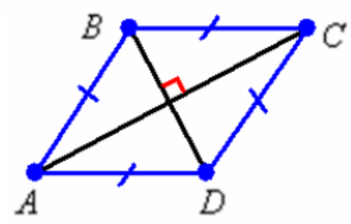
Параллелограмм в свою очередь включает в себя следующие частные случаи:

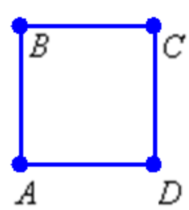
Прямоугольник – это параллелограмм с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

Ромб – это параллелограмм с равными сторонами: $AB = BC = CD = AD$ *(рисунок посередине)*. *Диагонали ромба* взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$.

Квадрат – это параллелограмм с равными углами и сторонами *(рисунок справа)*. Квадрат также называют ***правильным*** *четырёхугольником*.

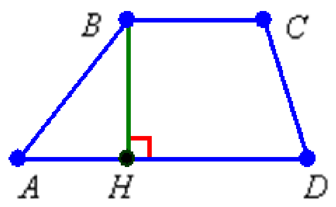




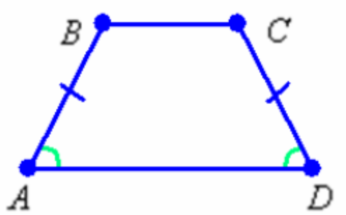


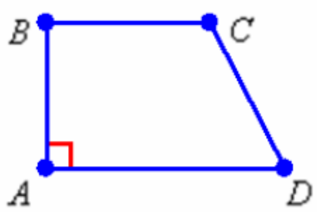
С площадями этих фигур, полагаю, ни у кого проблем не возникнет ;) Для ромба, помимо общей, есть специальная формула: $S = (1/2) \cdot |AC| \cdot |BD|$.

И ещё одна важная фигура. ***Трапеция*** – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет:



Параллельные стороны (AD и BC) называют ***основаниями***, а непараллельные (AB и CD) – ***боковыми сторонами***. **Площадь трапеции** равна полусумме оснований на высоту между ними: $S = \frac{1}{2}\left(|AD| + |BC|\right) \cdot |BH|$.





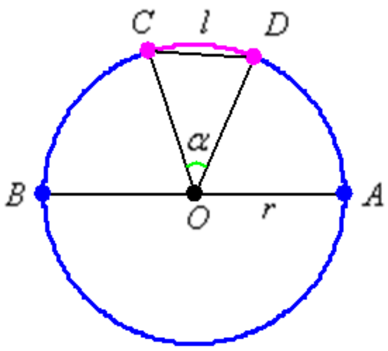
Трапецию с равными боковыми сторонами называют ***равнобокой*** или ***равнобочной*** *(слева)*. Трапецию с прямыми углами при боковой стороне называют ***прямоугольной***.

Наверное, вам понятны термины ***параллельность*** и ***перпендикулярность***, которые встретились выше, но всё же: прямые являются *параллельными*, если они не пересекаются. Отрезки параллельны – если они лежат на параллельных прямых. Прямые являются *перпендикулярными*, если они пересекаются под углом 90 градусов. **Обозначения:** $\parallel$ и $\perp$.

Теперь моя совесть чиста, и мы едем дальше, причём на колёсах:

4.4. Окружность и круг

Окружность – это множество точек, равноудалённых от фиксированной точки O. Эта точка называется ***центром*** *окружности*, **и окружности она не принадлежит!** Сюда мы ставим ногу циркуля при выполнении чертежа, и, кстати, **важный технический приём: пока вы не прочертили окружность или нужную её часть, остриё циркуля отрывать от бумаги нельзя!** Отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (OA, OB, OC, OD) называется ***радиусом*** *окружности*, его **длину** стандартно **обозначают** буквой r («эр»).



Длина окружности равна: $L = 2\pi \cdot r$, Кусок окружности между двумя её точками называется ***дугой***, например $\overset{\frown}{l} = CD$. Угол α («альфа») называется ***центральным***. **Длину дуги** можно вычислить по **формуле** $l = \alpha \cdot r$, где угол α выражен в радианах.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой*** (например, CD). Хорда, проходящая через центр, делит окружность на две ***полуокружности*** и называется ***диаметром*** (например, AB). **Длина диаметра** обозначается буквой d, и помнят все ребятишки, что $d = 2r$.

Окружность не следует путать с кругом. *Круг* – это множество точек лежащих внутри окружности + сама окружность. **Формула площади круга**: $S = \pi \cdot r^2$.

И для закрепления материала ОБЯЗАТЕЛЬНО прорешиваем следующие задачки:

Задание 9

а) Найти высоту $|BH|$ равнобедренного треугольника, если известно его основание $|AC| = 10$ и боковая сторона $|BC| = 7$.

Задачи по геометрии (да и не только) удобно снабжать схематическими чертежами

Это облегчает решение. Поэтому если задача не самая простая, то не стесняйтесь:

б) Известен угол $\angle A = 30^0$ и гипотенуза $|AB| = 8$ прямоугольного ΔABC. Найти катеты и площадь этого треугольника.

Тригонометрическая таблица *(Приложение)* в помощь, но не пользуйтесь ей тут:

в) Что можно сказать о ΔABC с гипотенузой AB, у которого $tg\angle A = 1$?

г) Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $|AB| = 5, |AD| = 12, \angle A = 60°$.

д) Найти диагональ, площадь и ***периметр*** p *(сумму длин сторон)* прямоугольника со сторонами $a = 3\sqrt{2}$, $b = 9$ см.

е) Найти площадь круга, если известна длина $L = 5\pi$ соответствующей окружности

Как вы помните, весь курс школьной геометрии делится на два больших раздела: геометрия плоскости (***планиметрия***) и геометрия пространства (***стереометрия***). Перечисленные выше фигуры можно рассматривать как на плоскости, так и в трёхмерном пространстве, ну а сейчас пришло время кратко повторить именно 3D-объекты:

4.5. Основные пространственные фигуры

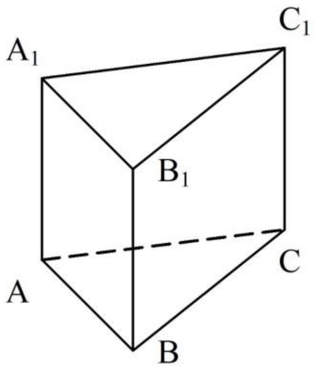
Во-первых, ***плоскость***, которая сама по себе является одной из элементарных геометрических фигур. На чертеже плоскость чаще всего изображают параллелограммом, что создаёт впечатление пространства:

Плоскость бесконечна, и у нас есть возможность изобразить лишь её кусочек. На практике помимо параллелограмма также прорисовывают овал или даже облачко.

Реальные плоскости, которые встречаются в практических задачах, могут располагаться как угодно – мысленно возьмите чертёж в руки и покрутите его в пространстве, придав плоскости любой наклон, любой угол

Обозначения: плоскости принято обозначать маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. На чертеже плоскость отмечена буквой σ («сигма»).

Призма – это фигура, состоящая из двух одинаковых многоугольников (***оснований***), лежащих в параллельных плоскостях, и ***боковых сторон***, которые представляют собой параллелограммы. На чертеже ниже изображена ***треугольная призма***:

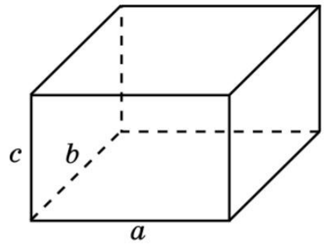


Основаниями данной призмы являются равные треугольники …, а *боковыми сторонами* – прямоугольники …. Любую сторону призмы также называют ***гранью***, а любой отрезок – ***ребром***.

Линии, которые мы не видим, принято проводить пунктиром! В данном случае от нас спряталось ребро AC.

Разумеется, треугольники не обязаны располагаться строго друг над другом, поэтому в общем случае у нас получится «косая» призма. Здесь же боковые рёбра *перпендикулярны* основаниями, и, очевидно, ***объём*** этой призмы равен: $V = S_{\Delta ABC} \cdot |AA_1|$.

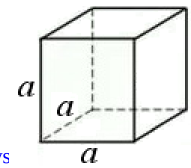
Если *основаниями* призмы являются не треугольники, а параллелограммы, то получится *(не сломать бы язык)* ***параллелепипед***. В качестве примера приведу популярнейший частный случай – ***прямоугольный параллелепипед***:



Все *грани* этого «пипеда» – прямоугольники, причём противоположные грани параллельны и равны, а углы между смежными рёбрами составляют 90°.

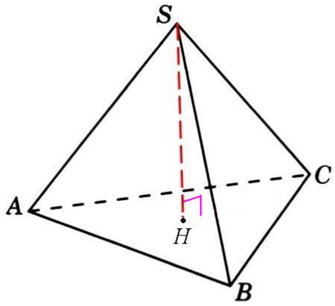
Эта форма встречается повсеместно (спичечный коробок, чемодан, комната и т.д.). Очевидно, что объём «пипеда» равен произведению длин трёх смежных сторон: ….

Если все рёбра равны, то получается ***куб*** *объёма* $V = a^3$, объём, кстати, и измеряют «кубиками». Но литры, конечно, удобнее.



И на всякий пожарный: **не путайте объём с массой!** Литровая банка ртути намного тяжелее литровой банки воды (хотя объём одинаков). Впрочем, это уже из кратчайшего курса физики ☺.

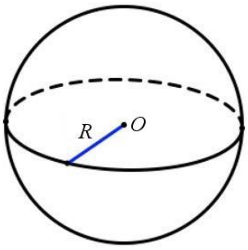
Пирамида – это многогранник, одна грань которого (***основание***) произвольный многоугольник, а остальные грани (***боковые стороны***) – треугольники с общей вершиной. Так, в основании египетских пирамид лежат прямоугольники…, представили? Отлично!



Пирамида с основанием-треугольником называется ***треугольной пирамидой*** или ***тетраэдром***. На рисунке слева точка S является ***вершиной***, а ΔABC – *основанием* пирамиды.

Объём пирамиды (любой) можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3}...$, где S_o – площадь основания, h – длина проведённой к нему высоты, для нашего тетраэдра: $V = \frac{1}{3}...$.

Сфера – это множество точек пространства, равноудалённых от заданной точки O:

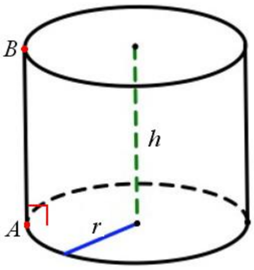


Точка O называется ***центром*** сферы, а значение R – ***радиусом***. Площадь поверхности сферы равна: $S = 4\pi R^2$.

Тело, ограниченное сферой (+ сама сфера), называется ***шаром***. **Не путайте эти понятия!** Сфера – поверхность, шар – тело.

Объём шара (!) можно вычислить по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

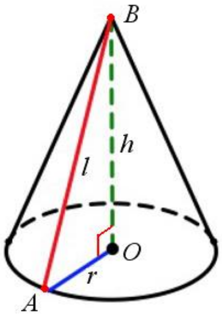
Следующие тела и поверхности я приведу в описательном порядке (без строгих определений). Всем знакомый ***прямой круговой цилиндр***:



Данное тело ограничено равными параллельными кругами сверху и снизу (***основания*** цилиндра), а ***боковая поверхность*** порождена ***образующими*** (в частности, AB) – *перпендикулярами*, которые соединяют окружности. Площадь боковой поверхности: $S_б = 2\pi rh$, где h – высота цилиндра, а r – радиус основания. Чтобы найти площадь поверхности всего цилиндра нужно приплюсовать площадь двух кругов: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Объём цилиндра: $V = \pi r^2 h$.

Существует великое множество других цилиндров, но во избежание путаницы мы ограничимся лишь этим частным случаем, рАвно, как и одним частными случаем ***конуса***:

Прямой круговой конус – это тело, ограниченное кругом *(**основание** конуса)* и ***образующими*** – отрезками равной длины l, которые соединяют окружность с ***вершиной*** B конуса, которая расположена строго над *(или под)* центром O круга:



Если известен радиус основания r и высота конуса h, то длину образующей можно найти с помощью теоремы Пифагора по формуле $r^2 + h^2 = l^2 \Rightarrow ...$. Площадь ***боковой поверхности*** конуса равна: $S_б = \pi rl$, а чтобы вычислить площадь поверхности всего конуса нужно добавить площадь круга: $S = \pi rl + \pi r^2$.

И объём конуса: $V = \frac{1}{3}\pi ...$. Есть ещё усечённый конус, но…

Информации этой главы должно хватить в 90-95% случаев! Ну а для случаев других есть учебники / справочники, где можно отыскать более редкие фигуры и формулы.

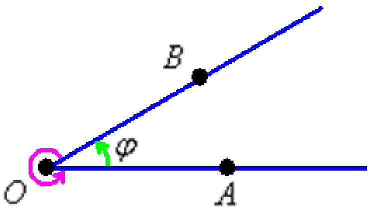
…никогда не думал, что прикладную геометрию можно изложить на 9,5 страницах… ☺

5. И немного тригонометрии

Тригонометрия изучает углы, тригонометрические функции *(синус и компанию)*, формулы, уравнения, неравенства и иже с ними. Начнём с базового понятия:

5.1. Об угле подробно

Во-первых, повторим определение, которое уже встретилось в курсе:) геометрии: ***угол*** – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. Заметьте, что эта конструкция задаёт два угла (зелёная и малиновая стрелки), но из контекста задач обычно понятно, о каком угле идёт речь:

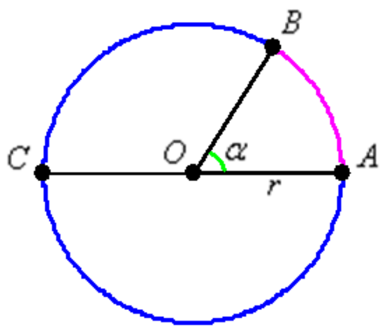


Обозначения: $\angle O$, $\angle AOB$, маленькие греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varphi$ и др. Существуют и другие способы.

Угол чаще отсчитывают **против часовой стрелки**, такой порядок называют ***положительным*** *направлением отсчёта* или ***положительной ориентацией*** угла.

«Открутку» угла можно провести и в противоположном направлении – от луча OB к лучу OA, в результате получится ***отрицательно ориентированный*** угол. К такому углу добавляется знак «минус», так, если $\varphi = 30^\circ$ («фи»), то $-\varphi = -30^\circ$. Во многих задачах ориентация угла не имеет значения, и его принимают положительным.

Углы измеряют в ***градусах***, ***радианах*** и более редких единицах. И если градусы представляет любой обыватель, то радианы не помнят даже некоторые «технари». Изобразим на чертеже окружность произвольного радиуса $r \neq 0$ с центром в точке O:



Радиан – это центральный угол α, **такой**, что длина соответствующей дуги $\overset{\frown}{AB}$ *(малиновый цвет)*, **равна** *радиусу* r окружности. **Радиан не зависит от конкретного значения** r и примерно равен $\alpha \approx 57^\circ$.

Радианная мера угла – это **отношение** длины дуги $\hat{l}$ между сторонами угла к радиусу окружности: $\alpha_{рад} = \dfrac{|\hat{l}|}{r}$.

Выясним, сколько радиан содержит, например, *развёрнутый* угол $\angle AOC = 180^\circ$. Из известной формулы длины окружности $L = 2\pi \cdot r$ следует, что длина верхней *полуокружности* равна $|\overset{\frown}{AC}| = \pi \cdot r$, таким образом, **в 180 градусах содержится**: $\alpha_{рад} = \dfrac{|\overset{\frown}{AC}|}{r} = \ldots$ радиан. Полный оборот (360°) включает в себя $2\pi \approx 6{,}28$ радиан (примерно 6,28 углов α). **Да, углы мы измеряем… в углах!** (радианах)

Для перевода градусов в радианы удобно использовать **формулу** $\alpha_{рад} = \dfrac{\alpha_{град} \cdot \pi}{180}$.

Переведём в радианы, например, угол $\alpha_{град} = 30^\circ$: $\alpha_{рад} = \dfrac{30 \cdot \pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$ радиан.

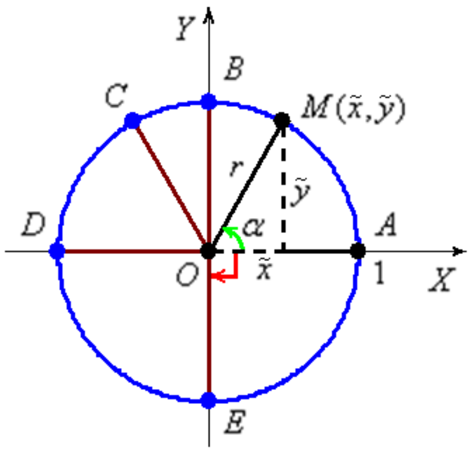
Обратно, **радианы переводятся в градусы по формуле:** $\alpha_{град} = \ldots \cdot \dfrac{180}{\pi}$. Например, переведём в градусы $\alpha_{рад} = \dfrac{\pi}{3}$: $\alpha_{град} = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 60^\circ$.

В высшей математике почти все вычисления проводятся в радианах

Это, можно сказать, тригонометрическая практическая аксиома :) И поэтому если вам предложены градусы, то для дальнейших преобразований их почти всегда придётся перевести в радианы *(формула выше)*. Теперь возвращаемся к знакомой теме:

5.2. Определение синуса, косинуса, тангенса через единичную окружность

Котангенс не вместился в строчку ☺. Не так давно мы определили эти отношения для острого угла, и сейчас распространим на произвольный угол. Для этого используют так называемую ***единичную окружность*** (радиуса $r=1$). Изобразим её в декартовой системе с центром в начале координат:



Рассмотрим **произвольную** точку $M(\tilde{x},\tilde{y})$, принадлежащую окружности, и *положительно ориентированный* угол $\alpha=\angle AOM$ *(зелёная стрелка)*.

Синусом угла α называют отношение *ординаты* точки M к радиусу окружности: $\sin\alpha=\dfrac{\tilde{y}}{r}$.

Косинусом угла α называют отношение *абсциссы* точки M к радиусу окружности: $\cos\alpha=\dfrac{\tilde{x}}{r}$.

Тангенс угла α – есть отношение $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ (если $\tilde{x}\neq 0$), и ***котангенс***: $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ (если $\tilde{y}\neq 0$).

Так, **углам** $0°, 360°, 720°, ...$ *(да-да, угол можно «накручивать» и дальше!)* соответствуют точка $A(1,0)$, и поэтому: $\sin 0=\dfrac{0}{1}=0,\ \cos 0=\dfrac{1}{1}=1,\ \mathrm{tg}\alpha=\dfrac{0}{1}=0$, а котангенса не существует, ибо ордината этой точки равна нулю.

Углу $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ $(90°)$ соответствует точка $B(0,1)$, следовательно:

$\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{1}=1,\ \cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{0}{1}=0$, тангенса не существует, $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{0}{1}=0$.

Углу $\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$ $(120°)$ соответствует точка …, следовательно:

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2},\ \mathrm{tg}\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Угол $\angle AOD=\pi$ $(180°)$ – **самостоятельно** *(сверьтесь по Тригоном. таблице)*.

Аналогично для отрицательно ориентированных углов. В частности, **углу** $\angle AOE=-\dfrac{\pi}{2}$ $(-90°)$ *(красная стрелка на чертеже)*, соответствует точка $E(0,-1)$, следовательно: $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{-1}{1}=-1,\ ...$, тангенс аминь, $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{0}{1}=0$.

На практике бывает удобно как «прикрутить» оборот к углу, так и «скрутить лишние». Так, угла $-\frac{\pi}{2}$ нет в ***Тригонометрической таблице***, но к нему можно мысленно прибавить 2π (один оборот), в результате чего получится угол в $\frac{3\pi}{2}$ радиан **с теми же самыми значениями синуса, косинуса и котангенса**. И, наоборот, в некоторых задачах появляются углы с «лишними» оборотами. Рассмотрим, например, угол 5π – здесь целесообразно «скрутить» два оборота: $5\pi - 4\pi = \pi$, получая эквивалентный угол.

И, как вы правильно догадались, угол можно «накручивать» до бесконечности в любом направлении. Представьте, что по единичной окружности «ездит» точка. По мере того, как мы будем проходить оборот за оборотом (в любую сторону) **значения синусов и компании будут периодически повторяться**. Таким образом, возникают:

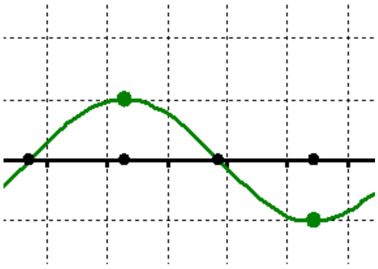
5.3. Тригонометрические функции

$y = \sin x, \;\; y = \cos x, \;\; y = \mathrm{tg} x, \;\; y = \mathrm{ctg} x$, где угол x выражен **в радианах (!).**

Данные функции **каждому действительному углу** x ставят в соответствие его синус, косинус, тангенс и котангенс *(если они существуют)*.

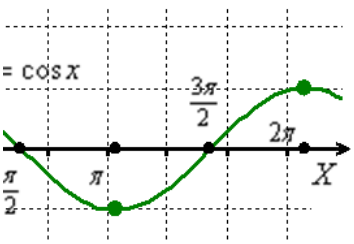
По указанной выше причине тригонометрические функции ***периодичны***. Геометрически это выражается тем, что у графика бесконечно повторяется один и тот же кусок. Рассмотрим наших пациентов по порядку:

График функции $y = \sin x$ называется ***синусоидой***:



Данная функция является ***периодической*** с ***периодом*** 2π . Выберем **любой промежуток длиной «два пи»**, проще всего посмотреть на отрезок $[0; 2\pi]$. …Взглянули? Легко понять, что этот кусок графика бесконечно «тиражируется» влево и вправо. Кроме того, синус нечётен: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ и синусоида симметрична относительно начала координат.

График $y = \cos x$ представляет собой *синусоиду*, сдвинутую на $\frac{\pi}{2}$ влево:

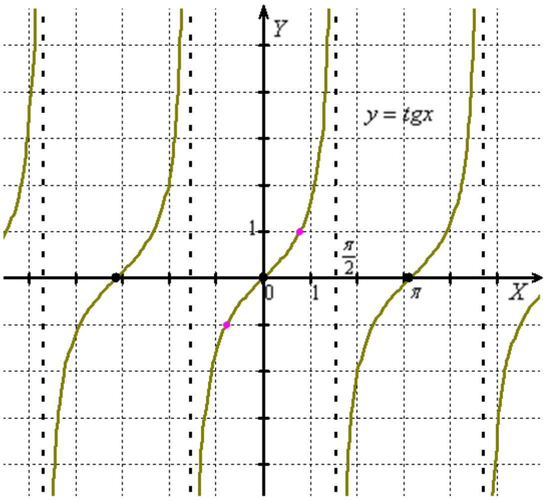


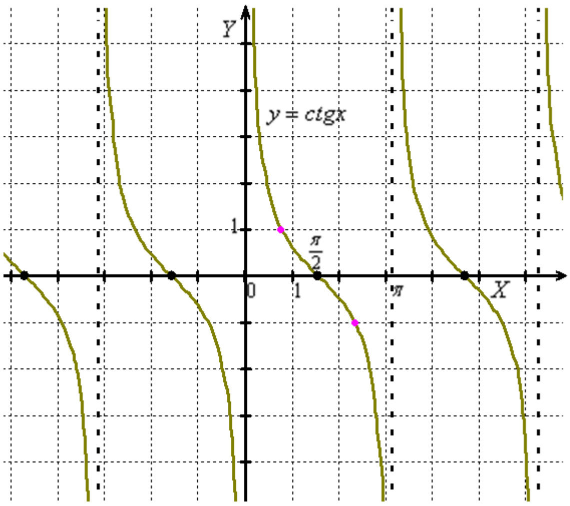
Данная функция тоже *периодическая* (с тем же периодом), однако является чётной: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, и её график симметричен относительно оси OY.

Синус и косинус ***ограничены*** и могут принимать значения лишь из отрезка $[-1; 1]$:

$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$

Тангенс $y = \mathrm{tg}x$ *(слева)* и котангенс $y = \mathrm{ctg}x$ тоже как братья:





И если синус с косинусом ***непрерывны*** на всей числовой прямой, то здесь графики терпят ***разрывы***. А именно, тангенс **не определён** в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k принимает все целые значения, а котангенса не существует в точках $x = \pi k$. Через эти точки проходят *вертикальные асимптоты* графиков *(пунктирные линии)*.

Легко видеть, что обе функции *периодичны*, но *период* у них меньше, чем у синуса с косинусом, и составляет π радиан (т.е. через каждые π график повторяется). При этом тангенс *нечётный*: $f(-x) = \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x = -f(x)$ и его график симметричен относительно начала координат. Котангенс – ….

При ручном построении графиков следует проявить аккуратность, так как $\pi \approx 3{,}14$. **Крайне не рекомендую** «округлять» масштаб по оси *OX («пи» = 3 клетки)*, это весьма дурной тон. Помимо очевидных, желательно использовать дополнительные опорные точки, в частности, значения $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а для тангенсов и котангенсов точки:

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, … *(см. чертежи выше)*.

5.4. Периодичность и взаимосвязь функций. Формулы приведения

На это уже все обратили внимание. Если к ЛЮБОМУ углу α прибавить или вычесть 2π, то получится **то же самое** значение синуса и косинуса:

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ – по причине периодичности этих функций

И, кроме того, синус и косинус можно взаимно превращать друг в друга, «сдвигая» аргумент на $\frac{\pi}{2}$, например: $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Желающие могут построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и убедиться в том, что это не что иное, как график $y = \cos x$.

Кстати, почему для общих объяснений я использую букву «альфа»? А дело в том, что **«альфа» может быть не только переменной «икс»**, но и сложной функцией, например: $\alpha = 2x$, $\alpha = 1 - 3x$, $\alpha = x^2$ или ещё более сложной.

Аналогично, в силу периодичности тангенса и котангенса:

$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$ и, кроме того, эти функции тоже могут превращаться друг в друга, в частности: $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Таким образом, если к углу прибавлены *(или вычтены)* значения $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, то мы можем избавиться от этих «добавок». Для этого используют так называемые ***формулы приведения***, которые вы можете найти в *Приложении* ***Тригонометрические таблицы***, и некоторые из которых я только что привёл выше. Существуют формальные правила, по которым осуществляются превращения, и желающие могут отыскать этот материал в школьном курсе математики.

Иногда формулы приведения используют не для упрощения, а для того, чтобы наоборот – усложнить запись, например, записать $y=\operatorname{ctg}x$ в виде $y=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ с целью дальнейших преобразований или анализа этой функции.

Разумеется, эти принципы справедливы и для бОльшего количества *периодов*, например: …и т.д.

Продолжаем изучать преобразования, позволяющие упростить жизнь:

5.5. Распространённые тригонометрические формулы

Следующие несколько фактов и формул нужно просто запомнить наизусть!

Без них ваша учёба может закончиться самым скверным образом.

Во-первых, на практике очень часто используют нечётность синуса и чётность косинуса, а именно, выносят «минус» из-под синуса: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, например, $\sin(-2x)=-\sin 2x$, и **уничтожают** минус под косинусом: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, например, $\cos(-2x)=\cos 2x$. Минус, кстати, выносится и у тангенса: $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Осуществимы и обратные действия – «минус» можно «затолкать» под синус: $-\sin(1-3x)=\sin(-(1-3x))=\sin(3x-1)$ или поставить его под косинусом: $\cos x=\cos(-x)$.

Особо подчёркиваю, что здесь мы не получаем каких-то новых функций! Эти преобразования *равносильны* или, как говорят математики, ***тождественны***. В частности, $y=-\sin(1-3x)$ и $y=\sin(3x-1)$ – это две совершенно одинаковые функции, просто запись разная. Одна запись удобна в одних задачах, другая – в других.

Ещё одна ходовая вещь, которую нужно запомнить «намертво» – это ***основное тригонометрическое тождество***:

…

Аргумент α может быть любым: $\sin^2 5x+\cos^2 5x=1, \quad \sin^2(1-x^2)+\cos^2(1-x^2)=1$ и т.д. И обратно, единицу можно превратить в нужную сумму, например: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$

Чуть позже мы выведем из этого тождества ещё несколько полезных формул.

Внимательные читатели ещё в прошлой главе подметили, что тангенс и котангенс – это два взаимно обратных отношения: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ *(для допустимых углов)* и, наоборот: $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$. По правилу пропорции обе функции можно расположить на одном этаже, и тогда мы получаем формулу $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$.

Тангенс можно выразить через синус и косинус: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, и, соответственно, котангенс равен обратному отношению: $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Теперь немного расслабьтесь, поскольку критически важные формулы позади, и вы спасены :) **Особая прелесть математики состоит в том, что знать нужно немного**, и из этого «немного» иногда можно вывести даже маленькую Вселенную. Получим несколько полезных формул из *основного тригонометрического тождества*. Прежде всего, здесь напрашивается выразить синус через косинус и наоборот:

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Когда ставить «плюс», а когда «минус» мы узнаем под занавес курса, в ходе изучения тригонометрических неравенств.

Если тождество *разделить почленно* на $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$, то получим ещё две полезные формулы, которые используются в некоторых задачах высшей математики:

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Думал не говорить, но всё-таки скажу: **не путайте** записи $\sin^2\alpha$ и $\sin\alpha^2$. В первом случае в квадрате находится синус: $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2 = \sin\alpha\cdot\sin\alpha$, а во втором – его аргумент: $\sin\alpha^2 = \sin(\alpha\cdot\alpha)$ и, конечно, **это не одно и то же**: $\sin(\alpha\cdot\alpha) \neq \sin\alpha\cdot\sin\alpha$.

И ещё раз заостряю внимание, что параметр «альфа» может быть не только буковкой «икс», но и сложной функцией! Все формулы работают:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}, \quad \sin(2x+1) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2x+1)}, \quad \mathrm{tg}^2(\ln x)+1 = \frac{1}{\cos^2(\ln x)}$$ и так далее.

Следующая группа – это ***формулы двойного угла***:

…

…

и более редкий тангенс: $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

Примеры использования:

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos 6x = \cos(2\cdot 3x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$$

Мегапопулярные ***формулы понижения степени***:

…

Запоминать их не нужно, сами запомнятся ☺. Натыкаться будете на каждом шагу.

Примеры: $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$

Разумеется, все рассматриваемые формулы работают и в обратном направлении, так, степень иногда требуется и повысить:

$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$, $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

Ну и еще куча похожих друг на друга формул. Сразу скажу, что них есть одно замечательное свойство – упорно не запоминаться. Я сотни раз искал их в справочнике, так и не запомнилась ни одна. Итак, для произвольных углов «альфа» и «бета» справедливо следующее. Раз:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Два:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Три:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Есть еще аналогичные формулы для тангенсов и котангенсов, но о них не будем, в 99,9% случаях – не встретите. Да и перечисленные формулы встречаются довольно редко. Но встречаются. Поэтому примеры употребления *(1-я формула из каждой группы)*:

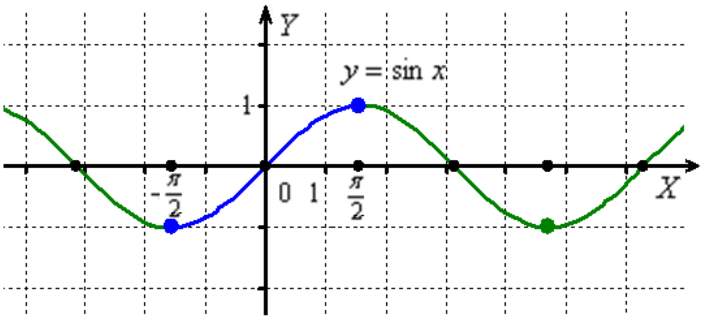
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$
$$\sin x\cos 2x=\frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2}=\frac{\sin 3x+\sin(-x)}{2}=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x$$
$$\sin x+\sin 2x=2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right)=2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\left(\frac{-x}{2}\right)=2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

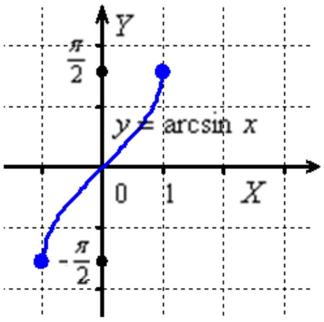
5.6. Обратные тригонометрические функции

Оглашаю весь список: ***арксинус***, ***арккосинус***, ***арктангенс***, ***арккотангенс***. Они предназначены для того, чтобы **по известному синусу, косинусу, тангенсу или арктангенсу угла, определить сам угол**. Например, если $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Если $\cos\pi=-1$, то $\arccos(-1)=\pi$. Если $\text{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то $\text{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ и $\text{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Но здесь есть одна проблемка: дело в том, что значению $\sin x=\frac{1}{2}$ *(например)* соответствует бесконечно много углов, а обратная функция (как и любая функция) должна быть определена **однозначно**. И эта проблемка решена так,… объясню на конкретном примере, а то у меня тут правило кошмарное получилось, которое я сразу удалил ☺.

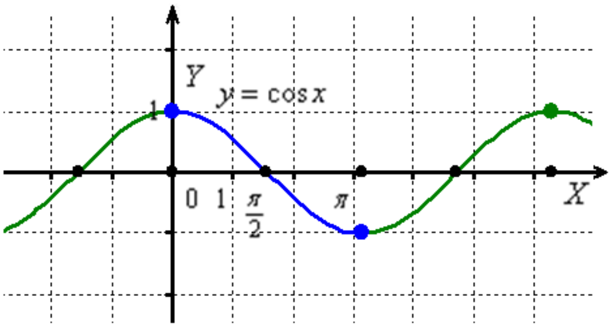
Синус принимает **все свои возможные значения** *(от –1 до 1)* на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и во избежание разночтений арксинус возвращает углы **только из этого отрезка**:

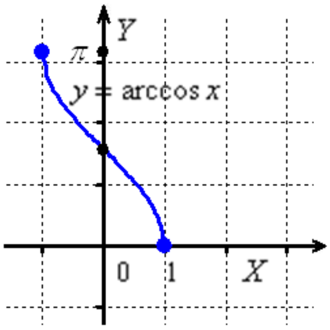


⇒


***Вообще**, по тексту здесь можно записать* $x=\arcsin y$, *но по логике переменные поменялись ролями, и посему* $y=\arcsin x$. Так, если …, то обратная функция все равно вернёт угол $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ и уже к этому результату нужно «прикрутить» нужное количество радиан $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, чтобы получить $\frac{5\pi}{6}$. Таким образом, функция $y=\arcsin x$ определена лишь на отрезке $D(y)=[-1;1]$ и, очевидно, *нечётна*: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$

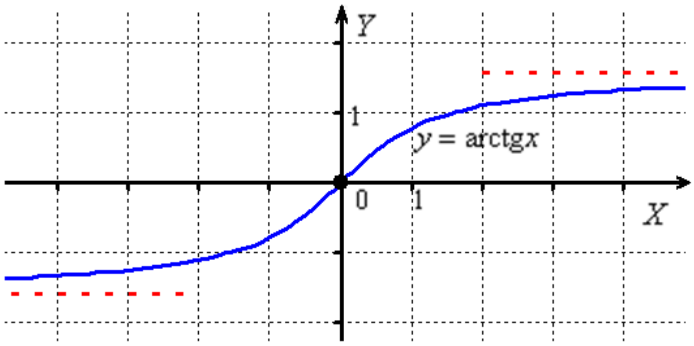
Аналогично, косинус принимает **все свои возможные значения** *(от 1 до –1)* на отрезке $[0;\pi]$, и *арккосинус* возвращает углы только из этого промежутка:



⇒


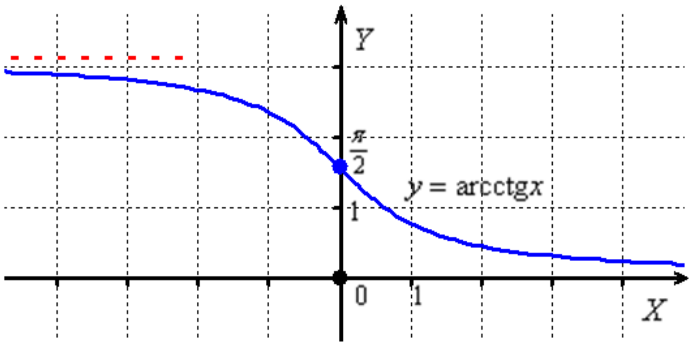
Функция $y=\arccos x$ определена на том же промежутке $D(y)=[-1;1]$, однако не является чётной или нечётной.

С *арктангенсом* и *арккотангенсом* всё проще. График $y = \operatorname{arctg} x$ представляет собой ветку тангенса, которая «лежит на боку»:



Данная функция определена на всей числовой прямой $D(y) = \mathbf{R}$ и возвращает углы из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенс *нечётен*: …. График функции ограничен *горизонтальными асимптотами* $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ *(красный пунктир)*.

График *арккотангенса* $y = \operatorname{arcctg} x$ ограничен асимптотами $y = \pi$ и $y = 0$:



Арккотангенс тоже определён на всей числовой прямой $D(y) = \mathbf{R}$, но возвращает углы из интервала $(0; \pi)$. Данная функция не является чётной или нечётной.

Внимание! Функцию $y = \operatorname{arcctg} x$ часто машинально «принимают» за арктангенс, и **чтобы не «обознаться», внимательно всматривайтесь, какая функция вам дана!**

Следует отметить, что две взаимно обратные функции *взаимоуничтожают* друг друга. Вспомним экспоненту и натуральный логарифм: $\ln e^x = x$ и наоборот, $e^{\ln x} = x$ *(основное логарифмическое тождество)*.

С тригонометрическими функциями и «арками» то же самое, в частности:
$\sin(\arcsin x) = x$ и $\arcsin(\sin x) = x$ *(для допустимых значений «икс»)* и аналогично для трёх других пар.

Кроме того, у «арков» существуют свои формулы и взаимосвязи, но они не столь актуальны в массовой практике. Кстати, здесь к месту такой совет:

Если ваша задача «зашла в тупик»,
то есть смысл заглянуть в математический справочник или учебник

Потому что различных фактов, правил и формул просто тьма, и это особенно характерно для геометрии и тригонометрии. Тех же тригонометрических формул – многие и многие десятки.

5.7. Простейшие тригонометрические уравнения

Нам будет достаточно повторить уравнения $\sin x = a,\ \cos x = a,\ \mathrm{tg}x = a,\ \ \mathrm{ctg}x = a$, где a – константа. Ну и чуть более сложные, когда аргумент равен $2x, 3x$ и т.п. В силу *периодичности* тригонометрических функций **эти уравнения имеют бесконечно много решений**, а синус с косинусом могут не иметь их вовсе. И в самом деле, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}x = 1$ соответствует бесконечно много углов, а вот с $\sin x = 2$ – печаль.

С синуса и начнём: $\sin x = a$. Поскольку синус *ограничен*, то это уравнение имеет корни только в том случае, если $-1 \le a \le 1$.

И эти корни таковы, **общая формула**: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, где k принимает все целые значения, сокращённо будем писать: $k \in \mathbf{Z}$.

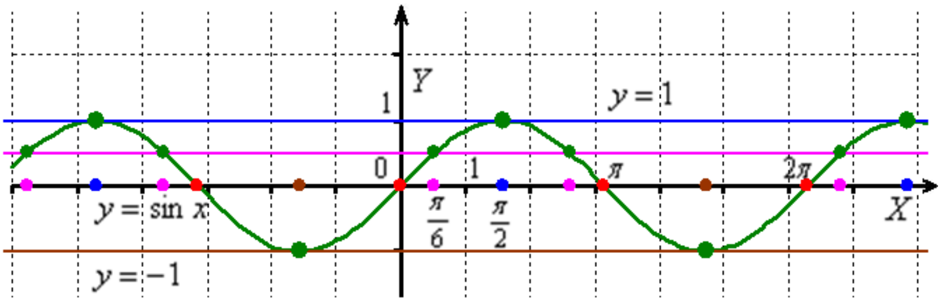
Так решением уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ являются углы:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Распишем несколько штук для …

Довольно часто в задачах требуется найти какой-то конкретный угол (или углы), так, если по условию угол должен быть тупым, то следует выбрать корень $\frac{5\pi}{6}$.

А теперь **важный вопрос**: **откуда взялась общая формула?** В школьном курсе формулы выводятся с помощью единичной окружности, но сейчас нам гораздо полезнее вспомнить графический метод решения уравнений. Строим синусоиду $y = \sin x$ и прямую $y = a$, например, $y = \frac{1}{2}$ *(малиновый цвет)*. После чего определяем «иксовые» координаты их точек пересечения *(малиновые отметки на оси OX)*:



Это и есть корни. Осталось уловить периодичность расположения корней и сконструировать формулу. Отработаем этот принцип на **важных частных случаях**:

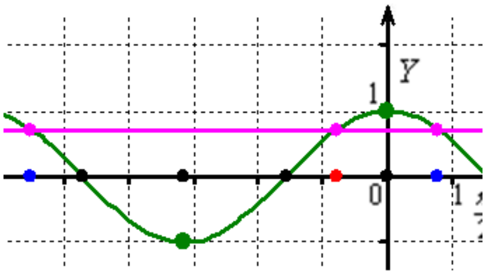
Решим графически уравнение $\sin x = 1$. Из чертежа следует, что прямая $y = 1$ пересекает синусоиду $y = \sin x$ через каждые 2π радиан, начиная от значения $x = \frac{\pi}{2}$ *(выбираем самое маленькое)*. Таким образом, уравнение имеет корни *(синие точки)*: $x = \frac{\pi}{2} + \dots$. Легко видеть, что решением уравнения $\sin x = 0$ является множество углов $x = \pi k,\quad k \in \mathbf{Z}$ *(красные точки)*, а решением $\sin x = -1$ – углы $x = -\frac{\pi}{2} + \dots$.

Все формулы справедливы не только для переменной x, но и для сложного аргумента, например, $2x, 3x, 4x$ (самые популярные) и других.

Решим, например, уравнение $\sin 2x = -1$. Используем только что выведенную частную формулу, только ВМЕСТО «икс» у нас «два икс»: $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. **Но это ещё не всё**, ведь нам нужно выразить «икс»: $x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Готово.

Разумеется, встречаются и «плохие» решения, рассмотрим уравнение $4\sin x - 3 = 0$. Приведём его к виду $\sin x = \frac{3}{4}$, и по общей формуле: $x = (-1)^k \ldots$. Этот арксинус можно вычислить лишь приближенно: $\arcsin\frac{3}{4} \approx 0{,}85$ *рад.* $\approx 48{,}5°$ и поэтому ответ лучше оставить с арксинусом.

Решим уравнение $\cos x = a$. Как и в случае с синусом, оно имеет корни, только если $-1 \le a \le 1$. Изобразим на чертеже графики функций $y = \cos x, \; y = a$ и определим «иксовые» координаты их точек пересечения. Во-первых, обращаем внимание на самые близкие к нулю значения: $x = -\arccos a, \quad x = \arccos a$ *(красная и синяя точки вблизи нуля)*:



И анализируя точки пересечения графиков, легко понять, что «красные» корни повторяются через каждые 2π радиан: $x = -\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ и «синие» корни тоже повторяются через этот же период: $x = \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Обе ветки решения можно объединить в **общую формулу**: $x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$

Решим, например, уравнение $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Уловка здесь детская: избавляемся от иррациональности в знаменателе: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, после чего записываем «хороший» ответ:

$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Именно это случай я изобразил на схематическом чертеже выше и желающие могут ещё раз осмыслить общую формулу, используя конкретные значения углов.

И в качестве задания я предложу вам вывести **три частные формулы** для уравнений $\cos x = -1, \; \cos x = 0, \; \cos x = 1$. Уже скоро на экранах ваших мониторов! ☺

Разумеется, аргумент может быть сложным: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$. **Формула та же самая**:

$3x = \ldots = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Единственное, не забываем выразить «икс», разделив всё семейство углов на три: $x = \frac{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Осталось два более простых уравнения.

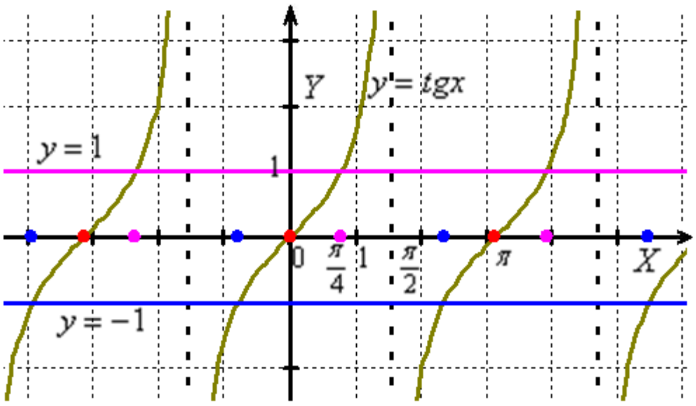
Уравнение $\mathrm{tg}x = a$ имеет решения при любом значении a, и ситуация здесь прозрачна, даже чертежа особо не нужно: «главная» ветка тангенса расположена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, берём отсюда угол: $x = \mathrm{arctg}a$ и добавляем *периоды* тангенса:

… – **общая формула**.

В качестве примера решим приятное уравнение $\mathrm{tg}x = 1$:

$x = \mathrm{arctg}1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ Готово!

И всё же приведу чертёж для этого и двух других частных случаев:



Решением уравнения $\mathrm{tg}x = 0$ является множество углов $x = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Решением уравнения $\mathrm{tg}x = -1$ – множество:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Эти формулы легко получить как аналитически (по общей формуле), так и графически.

Уравнение $\mathrm{ctg}x = a$ предлагаю для самостоятельного изучения, в числе других заданий, которые уже нет сил – не могу не предложить ☺

Задание 10

а) Перевести из градусов в радианы или наоборот: $60°, 90°, 135°, 150°, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi$.

б) Вычислить, не пользуясь калькулятором: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \cos\frac{8\pi}{3}, \mathrm{tg}3\pi, \mathrm{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

в) Упростить: $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x, \quad \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x, \quad \frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x}, \quad (\sin x + \cos x)^2,$

$(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\cos x, \quad 1 - 2\sin^2 x + 2\cos 2x, \ \sin x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; понизить степень до первой: $\sin^2 x\cos^2 x, \quad \sin^4 x$.

г) Графическим методом решить уравнения $\cos x = -1, \ \cos x = 0, \ \cos x = 1$.

д) Вывести *(аналитически или графически)* общую формулу для решения уравнения $\mathrm{ctg}x = a$ и получить частные формулы для $\mathrm{ctg}x = -1, \ \mathrm{ctg}x = 0, \ \mathrm{ctg}x = 1$.

е) Решить аналитически: $\sin\frac{x}{2} = 1, \quad 3\cos 2x - 1 = 0, \quad tg3x = \sqrt{3}, \quad \sin x\cos\frac{x}{4} = 0$.

И ещё будет пункт ж) (в хорошем смысле ☺), который я предложу вам после изучения следующего параграфа:

5.8. Тригонометрические неравенства

Только что мы разобрали уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$ и **сейчас очередь за соответствующими** неравенствами – *строгими* $(<,>)$ и *нестрогими* $(\le, \ge)$. Эти неравенства тоже можно решить разными способами, но я по-прежнему ратую за графический метод решения, он полезнее и нагляднее. Вспоминаем **общий принцип**:

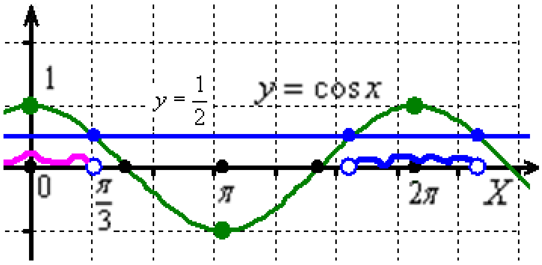
Решением неравенства $f(x) > a$ являются те интервалы *числовой прямой (оси OX)*, на которых график функции $y = f(x)$ расположен **выше** графика прямой $y = a$.
И, наоборот, неравенству $f(x) < a$ соответствуют интервалы, где график $y = f(x)$ **ниже** графика $y = a$. Если неравенства *нестрогие*, то к решению нужно добавить допустимые граничные точки, то есть вместо интервалов получатся отрезки либо полуинтервалы.

И из этих соображений сразу «щёлкаются» некоторые примеры:

$\sin x < 2$ – решением этого неравенства являются все значения «икс», поскольку синусоида $y = \sin x$ полностью лежит **под** графиком прямой $y = 2$. Соответственно, неравенство $\sin x > 2$ решений не имеет, т.к. выше прямой синусоиды нет.

$\cos x \ge -1$ – решением этого неравенства тоже является любое «икс»: $x \in \mathrm{R}$, ибо график $y = \cos x$ расположен **не ниже** прямой $y = -1$.

Теперь переходим к **общему случаю**. В предыдущем параграфе я начал с синуса, и сейчас для разнообразия «запилим» с косинуса. **Алгоритм решения** рассмотрим на конкретном примере: $\cos x > \frac{1}{2}$. Решением данного неравенства являются те участки оси OX, на которых график $y = \cos x$ **выше** графика $y = 1/2$:



На картинке всё тип-топ, но как получить это красивое решение аналитически? Сначала **нужно решить соответствующее уравнение**: $\cos x = \frac{1}{2}$, по общей формуле: $x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$, при этом **нас будут интересовать два корня, которые расположены близко к началу координат**. Очевидно, это корни $x = \pm\arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ выполнено на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ *(малиновая штриховка)* и **из чертежа следует, что эта ситуация повторяется через каждые** 2π **радиан**, то есть **решением данного неравенства является множество интервалов:**

$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbf{Z}$.... Громоздко, но довольно просто ☺. Так, при $k = -1$ получаем интервал, который левее: $\left(-\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}\right)$, а при $k = 1$ – интервал, который правее: … *(синие штриховки).*

Противоположному неравенству $\cos x < \frac{1}{2}$ соответствуют те участки оси OX, на которых график косинуса **ниже** прямой. Нетрудно выяснить, что это интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ и его «клоны», повторяющиеся через каждые 2π радиан: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$.

Если аргумент тригонометрической функции более сложный, например, $\cos 2x > \frac{1}{2}$ то неравенство удобно решить аналитически, используя некоторые геометрические факты и тот же алгоритм. График функции $y = \cos 2x$ имеет такой же вид, как и $y = \cos x$, только он сжат по горизонтали (как «гармошка») в два раза. Сначала решим соответствующее уравнение: $\cos 2x = \frac{1}{2}$. По общей формуле: $2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, откуда выражаем $x = \frac{\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. Нас по-прежнему интересует два ближайших к нулю угла, и это углы $x = \pm \frac{\pi}{6}$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ график $y = \cos 2x$ расположен **выше** прямой $y = 1/2$ и эта ситуация повторяется через каждые (внимание!) π радиан *(так как период сократился в 2 раза)*, таким образом, решение: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$.

И обещанный вывод формулы, выражающей косинус через синус на примере простого аргумента («икс»). Из основного тригонометрического тождества выражаем $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, после чего извлекли корень из обеих частей: $\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Теперь вспоминаем, как извлекается этот корень: $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ и как раскрывается модуль: …

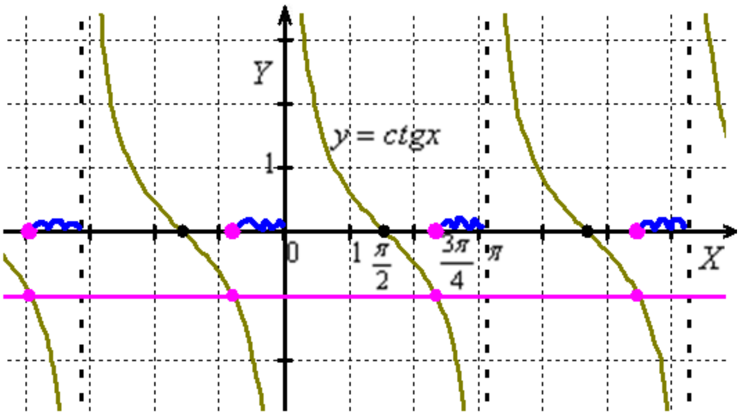
Решим неравенство $\cos x \geq 0$. График косинуса ***не ниже*** прямой $y = 0$ (оси OX) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и аналогичная ситуация повторяется через каждые 2π радиан. Таким образом, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], \quad k \in \mathbf{Z}$, то $|\cos x| = \cos x$, и мы получаем формулу со знаком «плюс»: $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Неравенство $\cos x < 0$, очевидно, выполнено на интервалах $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$ *(анализируем чертёж выше)*, в этом случае мы получаем $|\cos x| = -\cos x$ и формулу со знаком «минус»: $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$

Аналогично с «зеркальной» формулой: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ $\Rightarrow |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Синусоида (представили в уме!) ***не ниже*** оси OX на отрезках $[0; \pi]$ и иже с ним, поэтому при этих значениях угла: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Синусоида **ниже** оси OX на интервалах $(\pi; 2\pi)$ и иже с ним – при этих углах синус отрицателен, и в формуле следует поставить знак «минус»: $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$

Таким образом, **простые неравенства можно решать устно!** – это доступно даже «чайнику», главное, помнить, как выглядят графики функций, и где они пересекают ось *абсцисс*. **Следует также заметить**, что во многих задачах высшей математики неравенство нужно решить только для одного (обычно первого) периода. Так, для неравенства $\sin x \ge 0$ берут лишь отрезок $[0;\pi]$, а для $\sin x < 0$ – лишь $(\pi; 2\pi)$.

И синусы (с тангенсами заодно) я очень скоро предложу вам для самостоятельного решения, после того, как мы разберём котангенс на примере неравенства $\text{ctg}x \le -1$.

Изобразим на чертеже график $y = \text{ctg}x$ и прямой $y = -1$:



Нашему неравенству соответствуют **те** участки оси OX, где график котангенса ***не выше*** прямой. Рассмотрим «главный» период котангенса *(от 0 до «пи»)* и найдём «иксовую» координату точки пересечения графиков: $x = arcctg(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Таким образом, получаем полуинтервал $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ и, очевидно, эта ситуация повторяется через каждые π радиан: …

Легко понять, что противоположному неравенству $\text{ctg}x > -1$ соответствует интервал $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ *(где котангенс* ***выше*** *прямой)* и его «клоны»: $x \in \left(\pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$.

Ну а неравенства $\text{ctg}x > 0,\ \text{ctg}x < 0$ вообще решаются устно: $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$

Если аргумент с множителем, например, $\text{ctg}\frac{x}{3} > 0$, то можно использовать тот же шаблон: $\frac{x}{3} \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и для того, чтобы выразить «икс», нужно умножить на три каждую границу: $x \in \left(3\pi k; 3\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = \left(3\pi k; \frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$. График $y = \text{ctg}\frac{x}{3}$ имеет такую же форму, как и $y = \text{ctg}x$, но растянут по горизонтали в 3 раза (т.е. период был π, а стал 3π).

И в заключение обещанный пункт для самостоятельного решения:

ж) Решить неравенства: $\sin x < 1, \quad -2\cos x - 3 \ge 0, \quad \sqrt{2}\sin x - 1 > 0$ если $0 \le x \le 2\pi$ *(найти решение на первом периоде)*, $\sin\frac{x}{2} < 0, \quad tgx > \sqrt{3}, \quad tg3x \le \sqrt{3}$.

И я Вас поздравляю с успешным (надеюсь) завершением курса!

Должен сказать, в нём есть что-то сакральное. Дело в том, что я получил советское образование и окончил 10 классов, и сейчас у меня получилось ровно 100 страниц (по 10 на класс) и ровно 10 заданий для самостоятельного решения! Причём, и то, и другое вышло совершенно непреднамеренно – я ничего не сокращал и ничего не «подгонял», разве что межстрочные интервалы. **До скорых встреч в курсе высшей математики**!

Решения и ответы

Задание 1. ***Решение:***

а). *Это удалённость этих чисел до начала координат. Вычислим расстояния между числами: либо; либо.*

б),

, при значение функции равно:

в), *корень нацело или частично не извлекается, ,*

, – из отрицательных чисел чётные корни извлекать нельзя. Но если хочется, то ***можно*** ☺

г),

д), *«одноранговые» действия можно выполнять в любом порядке: либо так:.*

– действительного решения не существует.

Задание 2. ***Решение:***

а) *0,2 – «ноль целых, две десятых»:.*

–1,34 – «минус одна целая, тридцать четыре сотых»:, сокращаем дробную часть на два: и поскольку число отрицательное, то используем формулу.

2,625 – «две целых, шестьсот двадцать пять тысячных»:, сокращаем дробную часть на 125: . По формуле.

б),

в)

г),

– здесь можно выполнить почленное деление:, но рациональнее сначала сложить:, а в следующем примере без вариантов, сначала складываем в знаменателе, затем делим:

д)

– в качестве общего знаменателя выбираем. Вычислим дополнительные множители:, таким образом:

– в качестве общего знаменателя выбираем. Вычислим доп. множители:,. Таким образом:

е),

в следующем примере можно сначала выполнить почленное деление, а затем привести к общему знаменателю:, а можно сначала привести, а затем разделить:.

Задание 3. ***Решение:***

е) *Среди чисел выделяем три подгруппы подобных слагаемых:*

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

б)*,*
,

, также здесь можно использовать формулу, если, конечно, её увидели ☺

в) *– в результате мы получили то же самое (с точностью до перестановки слагаемых и множителей), таким образом:*

Второй способ:

Формулу можно вывести несколькими способами, например, так:

Вторую формулу легче всего получить из уже выведенной формулы:

г)*,*
,

,
(по формуле),
(по формуле),
.

д)*, и после сокращения следует иметь в виду, что.,*

Задание 4. ***Решение:***
а)
– а тут действий выполнить нельзя, так как это x *в степени* x^x, *не путайте с*
б)
,

в)

г) *– в качестве общего знаменателя выбираем, вычислим дополнительные множители:, таким образом:*
.

– в качестве общего знаменателя выбираем, вычислим дополнительные множители:, таким образом:

Аналогично:

д)

– знак модуля тут не нужен, поскольку.

Задание 5. *Решение:*

а) *Сначала определим количество членов прогрессии. Используем формулу, в данном случае*
, решаем уравнение:

, откуда следует, что
Сумму вычислим по формуле:

– используем ту же формулу, в данном случае, а количество членов является переменной величиной, таким образом:

б) *Данная прогрессия содержит только пять членов и поэтому её сумму нетрудно вычислить напрямую:*
, либо используем формулу, в данном случае:

Вторая прогрессия является бесконечно убывающей, поэтому. В данном случае, а основание выясним, разделив второй член на первый:, таким образом:
Для последней прогрессии используем ту же формулу для:
, вот такие вот дела.

Задание 6. ***Решения: а)***

Раскроем слева скобки: *, перенесем все «иксы» налево, а числа направо:* *Приведём подобные слагаемые:* *Умножим обе части на:* ***Ответ:*** ***Не забываем о проверках!***	*Преобразуем числитель левой части:* *Таким образом, получаем уравнение:* *По правилу пропорции:* ***Ответ:***
Перенесём квадрат направо: *и поменяем части местами:* *разделим обе части на 2:*	*Вычислим дискриминант:* *Таким образом:*

Вычислим дискриминант: *Таким образом, корни:* ***Ответ**:*	***Ответ:***
Вычислим дискриминант: *, таким образом, уравнение имеет кратные корни:* *, **ответ**:* ***Примечание:** когда дискриминант равен нулю, можно использовать формулы сокращенного умножения:* *либо* *, в нашем примере:* *, после чего корни понятны сразу, но такую возможность ещё нужно «углядеть».*	*– вынесем за скобки:* *Данное уравнение имеет **три корня**:, (кратные корни).* ***Примечание:** корни стараемся располагать в порядке их возрастания.* *– для разрешения этого уравнения относительно «икс» нужно извлечь корень из обеих частей, в данном случае модуль не нужен:* *, **ответ**:*
1) Решим уравнение: *«Сбросим» -3 в знаменатель правой части:* *2) Решим уравнение:* ***Ответ**:*	*Представим уравнение в виде системы:* *Первое уравнение не имеет решений, т.к. получается неверное числовое равенство.* *У второго уравнения корень должен удовлетворять условию:* ***Ответ**: (подходящий корень)* ***Справочно:** если в ходе решения получено верное числовое равенство, то корнями являются все значения «икс»; пример такого уравнения:*
, умножим обе части на: ***Ответ**:*	*Неравенство можно решить методом интервалов, но есть путь короче, используем формулу* *– данному неравенству удовлетворяет любое значение «икс», кроме того, которое обращает основание степени в ноль:* ***Ответ:***

Неравенство решим [методом интервалов](). Двучлен определён для всех значений. Решим соответствующее уравнение:

, используем формулу:

Таким образом, корни:.

Отметим корни на числовой прямой и определим знаки двучлена на полученных интервалах; пометим интервалы, удовлетворяющие неравенству:

***Ответ**:*

Решим неравенство. Определим недопустимые значения переменной, в данном примере это те значения, которые обращают знаменатель в ноль:

, используем формулу:

Данное уравнение имеет единственный действительный корень, поскольку дискриминант уравнения меньше нуля.

И, очевидно, уравнению удовлетворяет единственный корень.

Отметим на чертеже найденные точки и определим знаки дроби на полученных интервалах:

***Ответ**:*

Решим неравеннство. Найдём недопустимые значения переменной:

Вычислим дискриминант:

, значит, действительных корней нет, и дробь определена при любом значении «икс».

Уравнение имеет два корня:, которые следует «выколоть», поскольку неравенство у нас строгое. Определим знаки дроби на полученных интервалах, при этом удобно иметь в виду, что знаменатель при всех «икс»:

***Ответ**:*

***в)** Обыкновенную дробь называют правильной, если её числитель по модулю меньше знаменателя:. Это означает, что он находится в пределах. Таким образом, любая правильная дробь по модулю меньше единицы (все поняли смысл?).*

*Обыкновенную дробь называют неправильной, если её числитель по модулю больше либо равен знаменателю:. Это означает, что **или**, **или**. Таким образом, любая неправильная дробь по модулю больше единицы.*

Просто, кратко и удобно!

г) *Обозначим через длину детали и составим разность (в 1 сантиметре 10 миллиметров). Деталь признаётся бракованной, если эта разность по модулю больше половины миллиметра: (в данном случае 0,5 удобнее, чем). Это означает, что:*

или:

То есть, длина бракованной детали ***или*** *меньше 19,95 см* ***или*** *больше 20,05 см.*

д) *Это означает, что максимальная относительная погрешность исправного прибора по модулю равна, и при измерении будет допущена ошибка, которая попадёт в диапазон от до относительно истинного значения измеряемой величины.*

Задание 7. ***Решение: а)*** *Здесь нужно построить две прямые и определить точку их пересечения. Её координаты и будут решением системы.*

Из первого уравнения выразим:

, выберем следующие опорные точки:

Для построения графика удобно выбрать точки:

Из чертежа следует, что прямые пересекаются в точке

Ответ:.

б) *Раскрываем модуль:.*

Такие функции называют ***кусочными***.

Строим графики функций на соответствующих промежутках.

Функция «модуль икс» – чётная, поскольку:

, её график симметричен относительно оси.

в) *Проверим на чётность / нечётность функцию:*

., значит, данная функция не является чётной или нечётной.

При нахождении опорных точек нам сразу попадаются симметричные, откуда понятно, где вершина:

Проверим функцию:

, значит, она чётная и с вершиной и опорными точками нет проблем.

Функция определена лишь для и поэтому не может быть чётной или нечётной. Найдём несколько опорных точек и изобразим ветвь гиперболы:

Исследуем функцию: , значит, данная функция является нечётной и её график симметричен относительно начала координат. Для построения гиперболы достаточно найти несколько точек правой ветви:

Точки левой ветви находим из соображений симметрии или пользуясь аналитическим условием нечётности, например:.

г) *Запишем уравнение в виде и извлечём квадратный корень из обеих частей:. Слева нужно поставить модуль: и раскрыть его:*

, когда;

, когда.

Первая функция задаёт верхнюю полуокружность (так как «игреки» неотрицательны), вторая функция – нижнюю полуокружность.

Область определения каждой функции:. Очевидно, что обе функции чётные, их графики симметричны относительно оси

Задание 8. ***Решение:* *а)*** *Представим уравнение в виде и построим графики функций. Найдём следующие опорные точки:*

для построения графика:

для построения прямой:

Корнями являются «иксовые» координаты точек пересечения графиков, в данном примере это значения:

– самостоятельно подставьте их в исходное уравнение и убедитесь в том, что получаются верные равенства.

Сначала решить соответствующее уравнение:, для этого представим его в виде и построим графики функций:

Из чертежа следует, что уравнение имеет три корня:, (красные точки).

Неравенству и равносильному ему неравенству   соответствуют те промежутки, на которых график ***выше*** *графика.*

Ответ*:*

Представим неравенство в виде и изобразим на чертеже графики функций (чтобы построить второй график нужно «поднять» график на одну единицу вверх).

Внимание! Не путаем и! *В первом случае единица никак не относится к логарифму – это просто два слагаемых, которые можно поменять местами:.*

Неравенству соответствуют те промежутки, на которых экспонента ***не выше*** *графика второй функции. Однако она везде (на интервале) выше его.*

Ответ: *решений нет.*

Построим график. Найдём асимптоту
и опорные точки:

Неравенству соответствует промежуток, на котором график логарифма ***ниже*** *оси абсцисс.*

Ответ*:*

б) *Решение представим уравнение в виде и изобразим на чертеже графики функций:*

Из чертежа следует, что прямая пересекает кубическую параболу в единственной точке. «Иксовая» координата этой точки и является корнем, «на глазок» он приближённо равен (красная точка).

Данный корень является иррациональным, и в курсе высшей математики мы научимся находить такие корни с очень высокой точностью.

в) *Дело в том, что и – это две* ***разные*** *функции с* ***разными*** *графиками. Следует, однако, заметить, что на два можно сократить обе части:, получая* ***ту же самую*** *функцию в неявном виде. Уравнения же и равносильны – по той геометрической причине, что параболы пересекают прямую (ось)* ***в одних и тех же точках****, т.е. сокращение уравнения на два никак не затрагивает его корни.*

г) *– не существует, или можно так:, в следующем примере используем основное логарифмическое тождество:, используем свойства логарифмов:*

д) *Для разрешения уравнения относительно «икс» прологарифмируем обе части: – полученное уравнение обращается в верное числовое равенство при единственном значении:.*

Примечание 1: *семейство показательных функций пересекается в точке, таким образом, решение уравнения легко усмотреть геометрически.*

Примечание 2: *уравнение* ***ни в коем случае*** *нельзя сокращать на!*
! *уравнение нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную.*

– по определению логарифма:, не забываем о проверках!, что и требовалось проверить.

– данное уравнение не имеет действительных корней, поскольку.

Решим неравенство *. Найдём область определения логарифма:*
. Теперь решаем основное неравенство, для этого искусственно домножаем его правую часть:

и «поднимаем» тройку:

, т.к. основание логарифма больше единицы, то в результате потенцирования знак неравенства не меняется:

В результате имеем систему, изобразим решения неравенств:

Решением системы и исходного неравенства является общая часть:
Решим неравенство*. Найдём область определения логарифма:*

– для решения этого неравенства решим соотв. уравнение:

Вычислим дискриминант:, следовательно, уравнение не имеет действительных корней. Берём любое «икс», удобно и подставляем в неравенство:

– в результате получено верное числовое неравенство, значит, при любом значении «икс».

Примечание: *также здесь есть простое геометрическое решение: парабола полностью лежит* ***над*** *осью (т.к. не пересекает ось и ветви направлены вверх), а значит, неравенству   удовлетворяет любое.*

Решаем основное неравенство:

, поскольку основание логарифма больше единицы, то после потенцирования знак неравенство следует оставить прежним:

Для соответствующего уравнения вычислим дискриминант:, значит, уравнение имеет кратные корни:, а неравенству удовлетворяют все значения кроме (это можно выяснить аналитически или геометрически – парабола касается оси и её ветви направлены вверх).

Таким образом, получаем систему, решением которой, и решением исходного неравенства являются все значения, кроме.

Решим неравенство*. Сначала найдём область определения:. Данное неравенство решим методом интервалов:*

Решаем основное неравенство: – для решения этого неравенства перенесём единицу направо и приведём разность к общему знаменателю:

Неравенство решим методом интервалов:

Таким образом, имеем систему и решением является интервал

Задание 9. ***Решение:***

а) *Выполним схематический (без соблюдения пропорций) чертёж:*

В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, т.е. делит основание на равные части:. Рассмотрим, по теореме Пифагора:, откуда находим:.

Ответ*:*

б) *Выполним схематический чертёж:*

По определению, ,. По Тригонометрической таблице находим:,.

Из вышеприведённых отношений выражаем:

, .

И здесь напрашивается ***проверка*** *по теореме Пифагора:*

, откуда:.

Площадь треугольника равна половине произведения стороны, на проведённую к ней высоту. Катет BC одновременно является и высотой к катету AC (и наоборот), поэтому:

Ответ*:, ,*

в) *Тангенс острого угла – это отношение его противолежащей стороне к прилежащей:. По условию, это отношение равно единице, а значит, катеты имеют равные длины:*

Таким образом, является не только прямоугольным, но ещё и равнобедренным. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому. И в самом деле, если мы заглянем в Тригонометрическую таблицу, то обнаружим, что.

И тут осталось местечко для последнего пункта, где чертёж не нужен:

е) *По формуле длины окружности:, и из этого уравнения находим радиус:. Вычислим площадь соответствующего круга:*

Ответ*:*

г) *Выполним схематический чертёж:*

По формуле,. Найдём высоту. Для этого рассмотрим прямоугольный и отношение . По триг. таблице, , таким образом:. В результате:.

Ответ*:*

д) *Выполним схематический чертёж:*

Длину диагонали найдём с помощью теоремы Пифагора:

Площадь прямоугольника:.

Периметр:.

Ответ*:*

Задание 10. ***Решение:***

а) *Используем формулу:*

Используем формулу.

б) *Используем нечётность синуса и таблицу:,* ***второй способ*** *– добавим один период: (по таблице).*

«Скрутим» один период:.

«Скрутим» 3 периода: (период тангенса равен «пи»).

Добавим один период:.

в) *Используем формулу приведения:.*

Используем алгебраические действия и тригонометрические формулы:

;

;

Используем формулу квадрата суммы:

;

;

.

Понизим степень: используем формулу:

Способ второй**:.**

по формуле:

.

г) *Изобразим на чертеже график и прямые (прямая – это ось абсцисс):*

Решим уравнение. График пересекает синусоиду в точке с абсциссой и пересечения повторяются каждые радиан, таким образом:

(малиновые точки).

Решим уравнение. Синусоида пересекается с осью в точке и пересечения повторяются каждые радиан (красные точки), таким образом:

.

И, наконец, уравнение. График пересекает синусоиду в точке с абсциссой и пересечения повторяются каждые радиан, таким образом:

(синие точки).

д) *Решим уравнение. Изобразим на чертеже графики и определим «иксовую» координату их точки пересечения на «главном» периоде котангенса. Эта координата равна:*

И, в силу периодичности котангенса, получаем решения: (малиновые точки). Из общей формулы легко получить частные, для:

, для:

и для ***е)*** *Решим уравнение. Используем частную формулу:. Выразим искомое множество углов:.*

Преобразуем уравнение к стандартному виду:. Используем общую формулу:. Выразим искомое множество решений:

Примечание: *«плохое» значение оставляем в неизменном виде.*

Уравнение решим с помощью соответствующей общей формулы:

, выразим «икс»:

Решим уравнение

. Произведение равно нулю, если равен нулю хотя бы один множитель, поэтому здесь нужно решить два отдельных уравнения и результаты объединить:

1), по частной формуле:;

2), по частной формуле:

Все углы, полученные в пункте 2, входят во множество углов пункта 1, поэтому в ***ответе*** *достаточно указать множество.*

ж) *Неравенству удовлетворяют все значения, кроме точек пересечения синусоиды и прямой:.*

Умножим обе части неравенства на –1, сменив у него знак:, далее: – ***решений нет****, т.к. график косинуса лежит* ***над*** *прямой.*

Преобразуем неравенство к виду и изобразим на чертеже графики и:

Найдём точки пересечения синусоиды и прямой, для этого решим соответствующее уравнение, по общей формуле   Нашему неравенству соответствуют те участки оси, где синусоида ***выше*** *прямой, при этом нам нужно решить неравенство лишь на промежутке. Из чертежа следует, что этим условиям удовлетворяет единственный интервал, его концы найдём из общей формулы:.*

Ответ*:*

Для решения неравенства   удобно использовать решение. Синусоида ***ниж****е оси на интервале (см. чертёж выше) и эта ситуация повторяется через каждые радиан:. Этот шаблон работает и для сложного аргумента:, осталось выразить «икс», умножив на два каждый интервал,* ***ответ****:.*

Решим неравенство, для этого построим графики:

И найдём их точки пересечения, для этого решим уравнение:

.

Из чертежа следует, что график тангенса ***выше*** *прямой на, и это повторяется через каждые «пи» радиан:.*

Неравенство решим с помощью неравенства с простым аргументом:. Из чертежа следует, что график тангенса ***не выше*** *прямой на полуинтервале и уже с ним:. Используем этот шаблон для сложного аргумента: и выразим* ***ответ****, уменьшив каждый полуинтервал в 3 раза:*